## HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$

und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

1.1 Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von $g$ und $h$ an.
Zeigen Sie, dass $g$ und $h$ senkrecht zueinander verlaufen.

(2 P)

1.2 Die Ebene $E$ enthält die Geraden $g$ und $h$.
Bestimmen Sie eine Gleichung von $E$ in Koordinatenform.

(3 P)

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1) |
|---|---|
| 1.1 | Koordinaten des Schnittpunkts: $(3\,\vert\,-3\,\vert\,3)$<br>Da zudem $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 3 = 0$ ist, ist $g$ senkrecht zu $h$.<br>2 P |
| 1.2 | Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zu den Richtungsvektoren von $g$ und $h$ und ist daher ein Normalenvektor der Ebene $E$.<br>Mit $(3\,\vert\,-3\,\vert\,3) \in E$ folgt $E : 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \cdot (-3) = -3$,<br>also $E : x_2 = -3$.<br>3 P |

## HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Gerade $g$ und die Ebene $E$ durch

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E : 4x_2 - 3x_3 = 25.$$

2.1 In jeder Zeile ist genau eine Aussage richtig. Kreuzen Sie diese an.

Die Gerade $g$ ist parallel zur ...

☐ $x_1x_2$-Ebene. ☐ $x_1x_3$-Ebene. ☐ $x_2x_3$-Ebene.

Die Gerade $g$ hat zur $x_2x_3$-Ebene den Abstand ...

☐ 0. ☐ 1. ☐ 4.

Die Gerade $g$ ...

☐ verläuft orthogonal zu $E$. ☐ verläuft echt parallel zu $E$. ☐ liegt in $E$.

(3 P)

2.2 Berechnen Sie den Abstand der Ebene $E$ vom Ursprung.

(2 P)

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1) |
|---|---|
| 2.1 | Die Gerade $g$ ist parallel zur ...<br>☐ $x_1x_2$-Ebene. ☐ $x_1x_3$-Ebene. ☒ $x_2x_3$-Ebene.<br>Die Gerade $g$ hat zur $x_2x_3$-Ebene den Abstand ...<br>☐ 0. ☒ 1. ☐ 4.<br>Die Gerade $g$ ...<br>☐ verläuft orthogonal zu $E$. ☒ verläuft echt parallel zu $E$. ☐ liegt in $E$.<br>3 P |
| 2.2 | Der Abstand zwischen Ebene $E$ und Ursprung beträgt<br>$d = \left\lvert \frac{-25}{\sqrt{4^2+3^2}} \right\rvert = \frac{25}{5} = 5.$<br>2 P |

## HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Ebene $E : x_2 - 3x_3 = -19$ sowie die Punkte $P(1\,|\,2\,|\,2)$, $Q(1\,|-1\,|\,11)$ und $S(-2\,|-4\,|\,5)$.

3.1 Zeigen Sie, dass $S$ in der Ebene $E$ liegt.

(1 P)

3.2 Weisen Sie nach, dass die Gerade durch $P$ und $Q$ senkrecht zu $E$ steht.

(2 P)

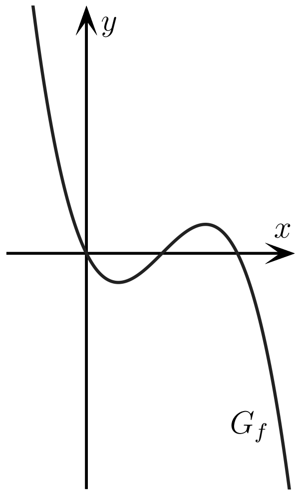
3.3 Die Punkte $P$ und $Q$ haben den gleichen Abstand von der Ebene $E$.
Die Punkte $S$ und $P$ legen die Gerade $g$ fest. Spiegelt man $g$ an $E$, so erhält man die Gerade $h$.
Geben Sie eine Gleichung von $h$ an.

(2 P)

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1) |
|---|---|
| 3.1 | Wegen $-4 - 3 \cdot 5 = -19$ liegt $S$ in $E$. 1 P |
| 3.2 | Für $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ der Ebene gilt $\overrightarrow{PQ} = -3 \cdot \vec{n}$. Also ist die Gerade durch $P$ und $Q$ senkrecht zu $E$. 2 P |
| 3.3 | Bezeichnet man den Koordinatenursprung mit $O$, so gilt: $h : \vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \overrightarrow{SQ}$ bzw. $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ 2 P |

## HMF 4 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung zeigt ihren Graphen $G_f$, der bei $x = 1$ den Wendepunkt $W$ hat.




4.1 Zeigen Sie, dass die Tangente an $G_f$ im Punkt $W$ die Steigung 1 hat.

(2 P)

4.2 Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung $m$, die durch $W$ verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit $G_f$ in Abhängigkeit von $m$ an.

(3 P)

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analysis (Pool 1) |
|---|---|
| 4.1 | $f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$, $f'(1) = -3 + 6 - 2 = 1$ <br> 2 P |
| 4.2 | Die Anzahl der Schnittpunkte ist $3$ für $0 < m < 1$ und $1$ für $m \geq 1$. <br> 3 P |

## HMF 5 - Analysis (Pool 1)

5.1 Es ist jeweils genau eine Lösung richtig. Kreuzen Sie diese an.

Der Graph der Funktion $h$ mit $h(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$ und $x \in \mathbb{R}$ verläuft durch den Punkt

☐ $(2\,|\,4+\mathrm{e})$.  ☐ $(0\,|\,1)$.  ☐ $(1\,|\,0)$.

Der Graph von $h$ hat an der Stelle $1$ eine Steigung von

☐ $0$.  ☐ $1+\mathrm{e}$.  ☐ $2+\mathrm{e}$.

(2 P)

5.2 Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \mathrm{e} \cdot \ln(x) + \mathrm{e}$.
Zeigen Sie, dass die Funktionen $f$ und $g$ an der Stelle $1$ den gleichen Funktionswert und ihre Graphen dort die gleiche Steigung haben.

(3 P)

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analysis (Pool 1) |
|---|---|
| 5.1 | Der Graph der Funktion $h$ mit $h(x) = x^2 + \mathrm{e}^x$ und $x \in \mathbb{R}$ verläuft durch den Punkt<br>☐ $(2\,|\,4+\mathrm{e})$.  ☒ $(0\,|\,1)$.  ☐ $(1\,|\,0)$.<br>Der Graph von $h$ hat an der Stelle $1$ eine Steigung von<br>☐ $0$.  ☐ $1+\mathrm{e}$.  ☒ $2+\mathrm{e}$.<br>2 P |
| 5.2 | Es ist $f(1) = \mathrm{e}$ und $g(1) = \mathrm{e} \cdot \ln(1) + \mathrm{e} = \mathrm{e}$, also ist $f(1) = g(1)$.<br>Wegen $f'(x) = \mathrm{e}^x$ und $g'(x) = \frac{\mathrm{e}}{x}$ ist $f'(1) = \mathrm{e}$ und $g'(1) = \mathrm{e}$.<br>Also ist $f'(1) = g'(1)$.<br>3 P |

## HMF 6 - Analysis (Pool 2)

Gegeben sei die Funktionenschar $f_k$ mit $f_k(x) = k \cdot \mathrm{e}^{kx} - x^3$ und $k \in \mathbb{R}$.

6.1 Bestimmen Sie den Parameter $k$ so, dass der zugehörige Graph durch den Punkt $P(0\,|\,1)$ verläuft.

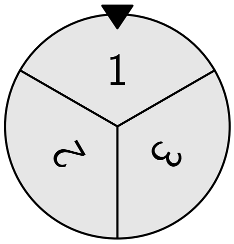
(2 P)

6.2 Berechnen Sie den Parameter $k$ so, dass $\int\limits_0^2 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 5$ gilt.

(3 P)

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 2) |
|---|---|
| 6.1 | Es gilt $f_k(0) = 1 \Leftrightarrow k \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 0} - 0^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1$.<br>2 P |
| 6.2 | $\int\limits_0^2 k \cdot \mathrm{e}^{kx} - x^3\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 5$<br>$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{kx} - \frac{1}{4} \cdot x^4\right]_0^2 = \mathrm{e} - 5$<br>$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2k} - 4 - 1 = \mathrm{e} - 5$<br>$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2k} = \mathrm{e}^1$<br>$\Leftrightarrow 2k = 1$<br>$\Leftrightarrow k = 0{,}5$<br>3 P |

## HMF 7 - Stochastik (Pool 1)




Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet.
Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

7.1 Die Zufallsgröße $X$ gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an.
Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte.

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{9}$ | | $\frac{1}{3}$ | | |

(2 P)

7.2 Betrachtet werden die Ereignisse $A$ und $B$:

$A$: „Es wird $(1\,;\,3)$, $(2\,;\,2)$ oder $(3\,;\,1)$ erzielt."

$B$: „Beim ersten Drehen wird eine $2$ erzielt."

Untersuchen Sie, ob $A$ und $B$ stochastisch unabhängig sind.

(3 P)

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1) |
|---|---|
| 7.1 | $k$: 2, 3, 4, 5, 6; $P(X=k)$: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{9}$ <br> 2 P |
| 7.2 | Wegen $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}=P((2\,;\,2))=P(A\cap B)$ sind $A$ und $B$ stochastisch unabhängig. <br> 3 P |

## HMF 8 - Stochastik (Pool 2)

Die Zufallsgrößen $X$ und $Y$ können jeweils die Werte $3$, $4$ und $5$ annehmen.

8.1 Für die Zufallsgröße $X$ gilt: $P(X = 3) = \frac{1}{3}$, $P(X = 4) = \frac{1}{4}$.
Bestimmen Sie den Erwartungswert von $X$.

(2 P)

8.2 Für die Zufallsgröße $Y$ gilt: $P(Y = 3) = \frac{1}{3}$, $P(Y = 4) \geq \frac{1}{6}$ und $P(Y = 5) \geq \frac{1}{6}$.
Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von $Y$ infrage kommen.

(3 P)

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2) |
|---|---|
| 8.1 | $P(X = 5) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$<br>$E(X) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{5}{12} \cdot 5 = \frac{49}{12}$<br>2 P |
| 8.2 | Für $P(Y = 5) = \frac{3}{6}$ ist $E(Y) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{3}{6} \cdot 5 = \frac{25}{6}$.<br>Für $P(Y = 5) = \frac{1}{6}$ ist $E(Y) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{3}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{23}{6}$.<br>Mit $\frac{1}{6} \leq P(Y = 5) \leq \frac{3}{6}$ ergibt sich $\frac{23}{6} \leq E(Y) \leq \frac{25}{6}$.<br>3 P |

**HMF-Bewertungsbogen für:** ________________________

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1) |
|---|---|
| 1.1 | Koordinaten des Schnittpunkts: $(3 \mid -3 \mid 3)$<br>Da zudem $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 3 = 0$ ist, ist $g$ senkrecht zu $h$.<br>2 P |
| 1.2 | Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zu den Richtungsvektoren von $g$ und $h$ und ist daher ein Normalenvektor der Ebene $E$.<br>Mit $(3 \mid -3 \mid 3) \in E$ folgt $E: 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \cdot (-3) = -3$,<br>also $E: x_2 = -3$.<br>3 P |

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1) |
|---|---|
| 2.1 | Die Gerade $g$ ist parallel zur ...<br>☐ $x_1x_2$-Ebene. ☐ $x_1x_3$-Ebene. ☒ $x_2x_3$-Ebene.<br><br>Die Gerade $g$ hat zur $x_2x_3$-Ebene den Abstand ...<br>☐ 0. ☒ 1. ☐ 4.<br><br>Die Gerade $g$ ...<br>☐ verläuft orthogonal zu $E$. ☒ verläuft echt parallel zu $E$. ☐ liegt in $E$.<br>3 P |
| 2.2 | Der Abstand zwischen Ebene $E$ und Ursprung beträgt<br>$d = \left\lvert \frac{-25}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right\rvert = \frac{25}{5} = 5.$<br>2 P |

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1) |
|---|---|
| 3.1 | Wegen $-4-3\cdot 5=-19$ liegt $S$ in $E$.<br>1 P |
| 3.2 | Für $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}0\\-3\\9\end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ der Ebene gilt $\overrightarrow{PQ}=-3\cdot\vec{n}$. Also ist die Gerade durch $P$ und $Q$ senkrecht zu $E$.<br>2 P |
| 3.3 | Bezeichnet man den Koordinatenursprung mit $O$, so gilt: $h:\vec{x}=\overrightarrow{OS}+r\cdot\overrightarrow{SQ}$ bzw. $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$<br>2 P |

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analysis (Pool 1) |
|---|---|
| 4.1 | $f'(x)=-3x^2+6x-2,\ f'(1)=-3+6-2=1$<br>2 P |
| 4.2 | Die Anzahl der Schnittpunkte ist $3$ für $0<m<1$ und $1$ für $m\geq 1$.<br>3 P |

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analysis (Pool 1) |
|---|---|
| 5.1 | Der Graph der Funktion $h$ mit $h(x)=x^2+\mathrm{e}^x$ und $x\in\mathbb{R}$ verläuft durch den Punkt<br>☐ $(2\,\|\,4+\mathrm{e})$. ☒ $(0\,\|\,1)$. ☐ $(1\,\|\,0)$.<br>Der Graph von $h$ hat an der Stelle $1$ eine Steigung von<br>☐ $0$. ☐ $1+\mathrm{e}$. ☒ $2+\mathrm{e}$.<br>2 P |
| 5.2 | Es ist $f(1)=\mathrm{e}$ und $g(1)=\mathrm{e}\cdot\ln(1)+\mathrm{e}=\mathrm{e}$, also ist $f(1)=g(1)$.<br>Wegen $f'(x)=\mathrm{e}^x$ und $g'(x)=\frac{\mathrm{e}}{x}$ ist $f'(1)=\mathrm{e}$ und $g'(1)=\mathrm{e}$.<br>Also ist $f'(1)=g'(1)$.<br>3 P |

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 2) |
|---|---|
| 6.1 | Es gilt $f_k(0) = 1 \Leftrightarrow k \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 0} - 0^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1$.<br>2 P |
| 6.2 | $\int_0^2 k \cdot \mathrm{e}^{kx} - x^3 \,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 5$<br>$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{kx} - \frac{1}{4} \cdot x^4\right]_0^2 = \mathrm{e} - 5$<br>$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2k} - 4 - 1 = \mathrm{e} - 5$<br>$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2k} = \mathrm{e}^1$<br>$\Leftrightarrow 2k = 1$<br>$\Leftrightarrow k = 0{,}5$<br>3 P |

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1) |
|---|---|
| 7.1 | $k$: 2, 3, 4, 5, 6<br>$P(X = k)$: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{9}$<br>2 P |
| 7.2 | Wegen $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = P((2\,;\,2)) = P(A \cap B)$ sind $A$ und $B$ stochastisch unabhängig.<br>3 P |

| | Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2) |
|---|---|
| 8.1 | $P(X = 5) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$<br>$E(X) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{5}{12} \cdot 5 = \frac{49}{12}$<br>2 P |
| 8.2 | Für $P(Y = 5) = \frac{3}{6}$ ist $E(Y) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{3}{6} \cdot 5 = \frac{25}{6}$.<br>Für $P(Y = 5) = \frac{1}{6}$ ist $E(Y) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{3}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{23}{6}$.<br>Mit $\frac{1}{6} \leq P(Y = 5) \leq \frac{3}{6}$ ergibt sich $\frac{23}{6} \leq E(Y) \leq \frac{25}{6}$.<br>3 P |

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

## Aufgabe 1: Analysis

Abbildung 1 zeigt schematisch drei Bahnen, auf denen sich eine Kugel beim Kugelstoßen bewegen kann. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit $1\,\mathrm{m}$ in der Realität; die $x$-Achse beschreibt den horizontal verlaufenden Boden. Die Kugel soll als punktförmig angenommen werden.

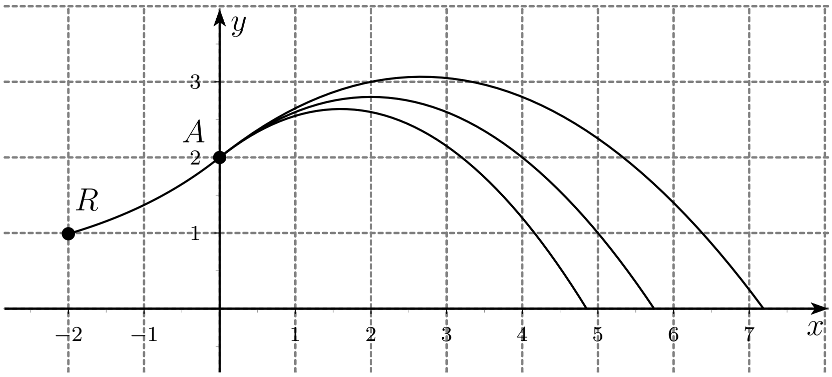


Abbildung 1

Die Kugel wird aus der Ruhelage $(R)$ beschleunigt, bis sie im Abstoßpunkt $(A)$ die Hand der Athletin verlässt. Die anschließende Flugkurve der Kugel ist abhängig von ihrer Geschwindigkeit beim Abstoßen. Damit verändert sich insbesondere die Stoßweite, d.h. der Abstand zwischen dem Punkt $(0\,|\,0)$ und dem Auftreffpunkt auf dem Boden.
Die Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt kann modellhaft durch die Funktion $f$ mit $f(x) = 0{,}4 + 1{,}6 \cdot e^{0{,}5 \cdot x}$ und $x \in [-2\,;0]$ beschrieben werden.

a) a1) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{RA}$ mit $R(-2\,|\,f(-2))$, die näherungsweise der Länge der Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt entspricht. (2 P)

a2) Berechnen Sie den Abstand der Kugel von der zur $y$-Achse parallelen Gerade durch $R$, wenn sie sich in der Hand der Athletin $1{,}50\,\mathrm{m}$ über dem Boden befindet. (4 P)

a3) Während eines Stoßes wurde die Höhe der Kugel über dem Boden an fünf Stellen gemessen. Die fünf Stellen werden im Modell durch die $x$-Werte $x_1$ bis $x_5$ dargestellt, die gemessenen Höhen werden mit $h_1$ bis $h_5$ bezeichnet.
Beurteilen Sie die folgende Aussage:

*Wenn der Wert des Terms* $\left|\sum_{i=1}^{5}(h_i - f(x_i))\right|$ *klein ist, dann werden die gemessenen Höhen durch die Werte, die das Modell liefert, gut beschrieben.*

(3 P)

b) Nach dem Abstoßen der Kugel lässt sich jede mögliche Flugkurve mithilfe einer der Funktionen $p_a$ mit $p_a(x) = -ax^2 + bx + 2$ und $a > 0$ beschreiben. Alle möglichen Bahnen der Kugel weisen im Abstoßpunkt $A$ keinen Knick auf.

b1) Ermitteln Sie den Wert von $b$. (4 P)

Verwenden Sie im Folgenden $p_a$ mit $p_a(x) = -ax^2 + 0{,}8x + 2$.

b2) Berechnen Sie denjenigen Wert von $a$, für den der Graph von $p_a$ durch den Punkt $(3\,|\,3{,}5)$ verläuft. (2 P)

b3) Bei der Flugkurve zu $a = 0{,}1$ beträgt die Stoßweite $10\,\text{m}$. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Kugel auf den Boden auftrifft. (3 P)

b4) Zeigen Sie, dass $\left(\frac{0{,}4}{a}\,|\,2 + \frac{0{,}16}{a}\right)$ der einzige Hochpunkt des Graphen von $p_a$ ist. (4 P)

b5) Weisen Sie nach, dass die Hochpunkte aller Graphen von $p_a$ auf einer gemeinsamen Geraden liegen. (3 P)

c) Der Zusammenhang zwischen den Werten von $a$ und den Stoßweiten $s$ mit $s > 0$ lässt sich durch die Gleichung $a = \dfrac{0{,}8}{s} + \dfrac{2}{s^2}$ darstellen.

c1) Leiten Sie diese Gleichung her. (3 P)

c2) Bei einem Stoß beträgt die Stoßweite $20\,\text{m}$. Berechnen Sie die größte Höhe über dem Boden, die die Kugel bei diesem Stoß erreicht. (4 P)

d) Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion $g$ mit $g(s) = \dfrac{0{,}8}{s} + \dfrac{2}{s^2}$ mit $s > 0$.

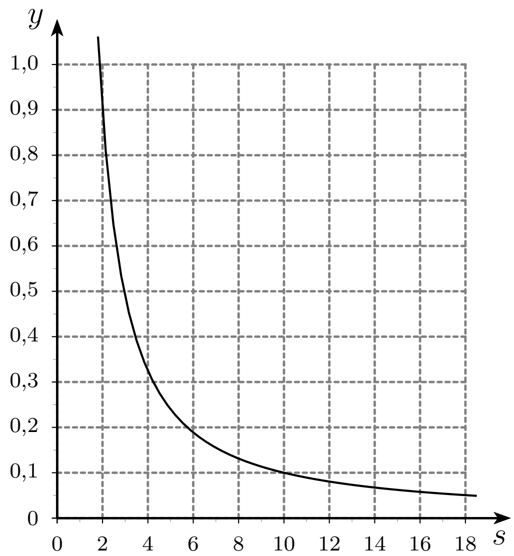


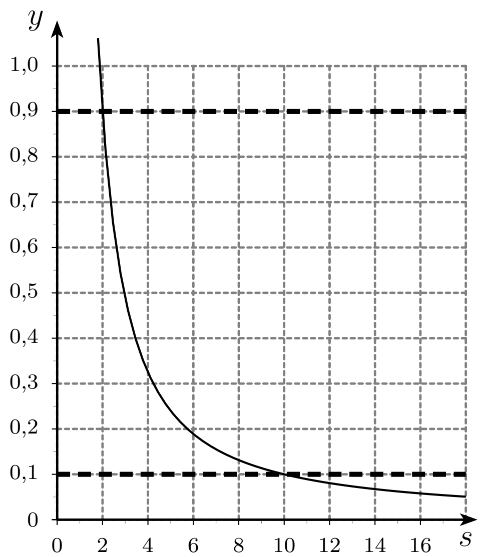

Abbildung 2

d1) Geben Sie eine Stammfunktion von $g$ an. (2 P)

d2) Zeichnen Sie in Abbildung 2 die beiden Parallelen zur $s$-Achse ein, die durch die Punkte des Graphen mit den $s$-Koordinaten $2$ bzw. $10$ verlaufen. (2 P)

d3) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph mit der $y$-Achse und den beiden eingezeichneten Parallelen einschließt. (4 P)

| **Erwartete Schülerleistung** | Bewertung Zuordnung I | II | III |
|---|---|---|---|
| **Teilaufgabe a)**<br>Wegen $\lvert\overline{RA}\rvert = \sqrt{(f(0)-f(-2))^2+(0-(-2))^2} \approx \sqrt{(2-0{,}99)^2+4}$ $\approx 2{,}24$ beträgt die Länge der Bahn ungefähr $2{,}24\,\mathrm{m}$. | 2 | | |
| $f(x)=1{,}5 \;\Leftrightarrow\; 0{,}4+1{,}6\,e^{0{,}5\,x}=1{,}5 \;\Leftrightarrow\; x=2\,\ln\left(\frac{1{,}1}{1{,}6}\right)\approx -0{,}75$<br>Wegen $-0{,}75-(-2)=1{,}25$ beträgt der Abstand der Kugel von der Geraden mit der Gleichung $x=-2$ etwa $1{,}25\,\mathrm{m}$. | 4 | | |
| Die Aussage ist falsch. Begründung: Werte von $(h_i - f(x_i))$ können sich teilweise gegenseitig aufheben, wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben. | | | 3 |
| **Teilaufgabe b)**<br>Es gilt $p_a'(x)=-2ax+b$ und $f'(x)=0{,}8\,e^{0{,}5\,x}$.<br>$p_a'(0)=f'(0) \;\Leftrightarrow\; -2a\cdot 0+b=0{,}8\,e^{0{,}5\cdot 0} \;\Leftrightarrow\; b=0{,}8$ | 1 | 3 | |
| $p_a(3)=3{,}5 \;\Leftrightarrow\; -a\cdot 3^2+0{,}8\cdot 3+2=3{,}5 \;\Leftrightarrow\; a=0{,}1$ | 2 | | |
| Aus $\tan(\varphi)=p_{0,1}'(10)=-1{,}2$ folgt $\varphi\approx -50{,}2°$.<br>Die Kugel trifft unter einem Winkel mit einer Größe von etwa $50°$ auf. | 3 | | |
| Notwendig für eine lokale Extremstelle $x$ von $p_a$ ist $p_a'(x)=0$.<br>$p_a'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; -2ax+0{,}8=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{0{,}4}{a}$<br>$p_a''(x)=-2a$<br>Da zusätzlich $p_a''\left(\frac{0{,}4}{a}\right)=-2a<0$ gilt, liegt an der Stelle $\frac{0{,}4}{a}$ der einzige Hochpunkt des Graphen der Funktion $p_a$ vor.<br>Da $p_a\left(\frac{0{,}4}{a}\right)=-a\left(\frac{0{,}4}{a}\right)^2+0{,}8\cdot\frac{0{,}4}{a}+2=2+\frac{0{,}16}{a}$ gilt, hat der Hochpunkt die Koordinaten $\left(\frac{0{,}4}{a}\,\middle\vert\,2+\frac{0{,}16}{a}\right)$. | | 4 | |
| Mit $x_a=\frac{0{,}4}{a}$ folgt $a=\frac{0{,}4}{x_a}$ und damit $y_a=2+\frac{0{,}16}{\frac{0{,}4}{x_a}}=2+0{,}4\cdot x_a$.<br>Somit liegen die Hochpunkte aller Graphen der Funktionen $p_a$ auf einer gemeinsamen Geraden mit der Gleichung $y=0{,}4\cdot x+2$. | | | 3 |
| **Teilaufgabe c)**<br>$p_a(s)=0 \;\Leftrightarrow\; -as^2+0{,}8s+2=0 \;\Leftrightarrow\; as^2=0{,}8s+2 \;\Leftrightarrow\; a=\frac{0{,}8}{s}+\frac{2}{s^2}$ | | 3 | |
| Für $s=20$ ist $a=\frac{0{,}8}{20}+\frac{2}{20^2}=0{,}045$.<br>Da der Hochpunkt die Koordinaten $\left(\frac{0{,}4}{a}\,\middle\vert\,2+\frac{0{,}16}{a}\right)$ hat, beträgt wegen $2+\frac{0{,}16}{0{,}045}\approx 5{,}6$ die größte Höhe der Kugel über dem Boden während des Stoßes etwa $5{,}6\,\mathrm{m}$. | | 4 | |

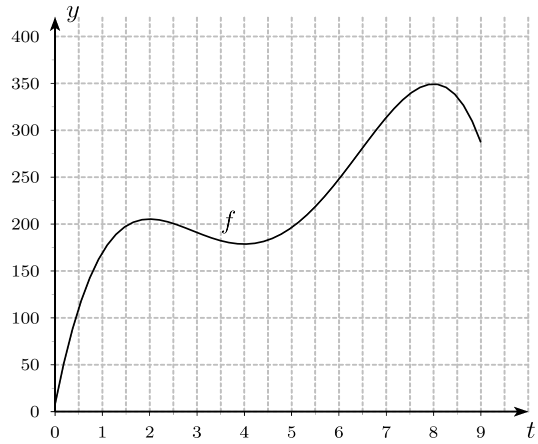
| **Erwartete Schülerleistung** | Bewertung Zuordnung | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| **Teilaufgabe d)**<br>Eine Stammfunktion von $g$ ist durch die Funktion $G$ mit<br>$G(s) = 0{,}8 \cdot \ln(s) - \frac{2}{s}$ , $s > 0$ gegeben. | | 2 | |
|  | | 2 | |
| Es gilt $g(2) = 0{,}9$ und $g(10) = 0{,}1$.<br>$$2 \cdot 0{,}9 + \int_2^{10} \left( \frac{0{,}8}{s} + \frac{2}{s^2} \right) ds - 10 \cdot 0{,}1 \approx 2{,}89$$ | | | 4 |
| Punktsummen | 12 | 18 | 10 |

## Aufgabe 2: Analysis

Da das Grillen im Winter immer beliebter wird, untersucht der Hersteller eines Gasgrills den Temperaturverlauf während eines Grillvorgangs bei einer Umgebungstemperatur von $8\,°\mathrm{C}$.
Zwei Minuten nach Beginn der Messung wird der Deckel für einen gewissen Zeitraum geöffnet, um Grillgut aufzulegen. Die durch den Temperaturfühler im Deckel gewonnenen Messpunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion $f$ mit

$$f(t) = -t^4 + \frac{56}{3}\,t^3 - 112\,t^2 + 256\,t + 8\ ;\ 0 \le t \le 9.$$

Dabei gibt $t$ die Zeit in $\mathrm{Minuten}$ und $f(t)$ die Temperatur am Temperaturfühler in $°\mathrm{C}$ an.




a) a1) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik auf dem Beiblatt sowohl die Temperatur als auch die momentane Temperaturänderungsrate sechs Minuten nach Beginn der Messung. (4 P)

a2) Berechnen Sie die maximale Temperatur. (6 P)

a3) Berechnen Sie die durchschnittliche Temperatur über dem Zeitintervall $[0; 9]$. (3 P)

a4) Der Hersteller behauptet, dass die momentane Temperaturänderungsrate zu Beginn des Grillvorgangs $5\,°\mathrm{C}$ pro Sekunde erreicht. Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Behauptung bei dem untersuchten Grillvorgang nicht zutrifft. (3 P)

b) Nach $9$ Minuten kühlt der ausgeschaltete Grill bei geöffnetem Deckel weiter ab. Die bei der Abkühlung gewonnenen Messpunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion $g_{a;b}$ mit

$$g_{a;b}(t) = a \cdot e^{-b\cdot(t-9)} + 7 \quad ; \quad 9 \le t \le 20 \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad b > 0.$$

Es gilt $g'_{a;b}(t) = -a \cdot b \cdot e^{-b\cdot(t-9)}$.

b1) Beweisen Sie, dass die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ an jeder Stelle $t$ fallen. (2 P)

b2) Die Graphen der Funktionen $g''_{a;b}$ verlaufen für alle $a > 0$ und $b > 0$ vollständig oberhalb der $t$-Achse. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Eigenschaft für die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$. (2 P)

b3) Auf dem Beiblatt ist der Graph einer Funktion $g_{a;b}$ abgebildet, der knickfrei an den Graphen von $f$ anschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Parameter $a$ und $b$. (5 P)

c) Im Folgenden wird die Funktion $g$ mit

$$g(t) = g_{280;\,0{,}5}(t) = 280 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)} + 7 \quad ; \quad 9 \le t \le 20$$

und die durch die Funktion $g$ beschriebene Abkühlungsphase betrachtet.

c1) Ermitteln Sie den Zeitpunkt $t$, an dem die momentane Temperaturänderungsrate gleich der mittleren Temperaturänderungsrate der Abkühlungsphase ist. (4 P)

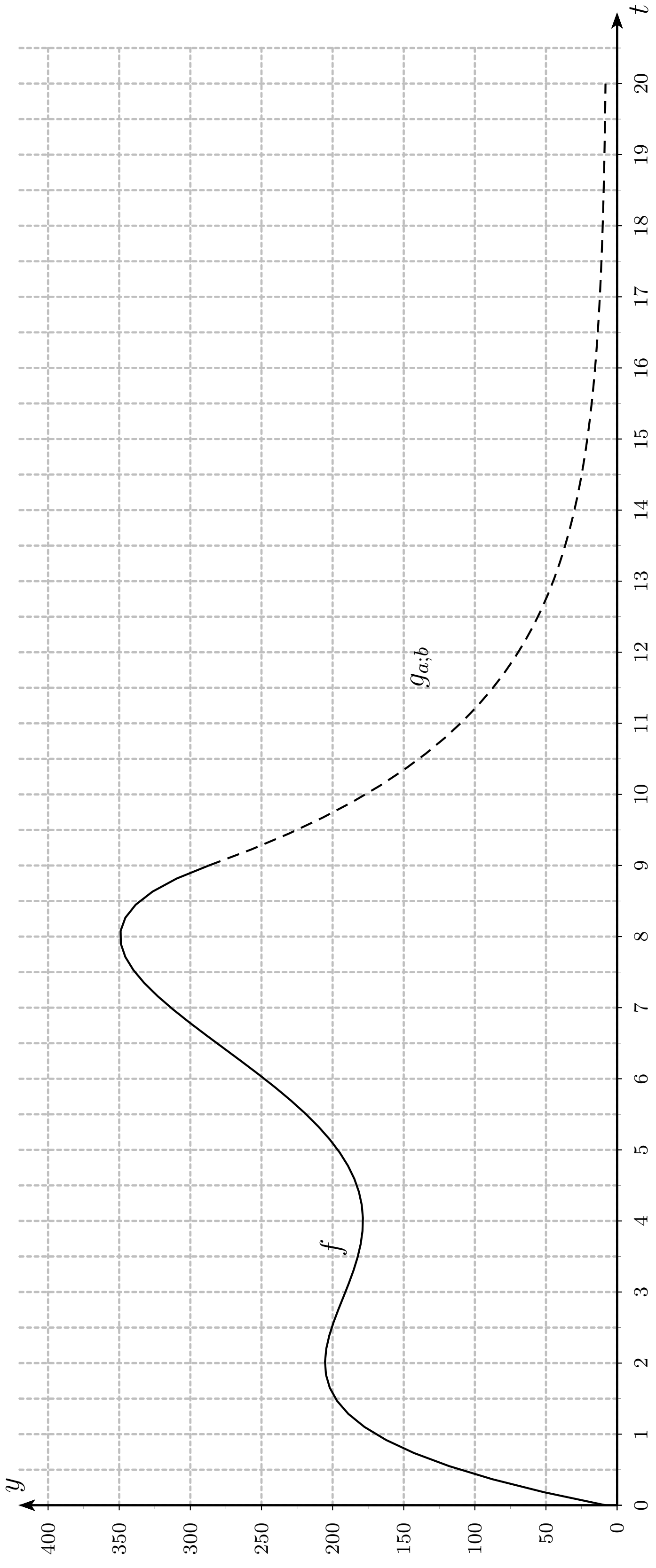
c2) Berechnen Sie das zweiminütige Zeitintervall, in dem die Temperatur um genau $100\,°\mathrm{C}$ sinkt. (3 P)

d) Der Graph von $f$, der Graph von $g$ und die $t$-Achse begrenzen über dem Intervall $[0; 20]$ eine Fläche $F$.

d1) Berechnen Sie den Inhalt $A$ dieser Fläche $F$. (3 P)

[Kontrolle: $A \approx 2666{,}91$]

d2) Durch den Punkt $M(m \mid 0)$ verläuft eine zur $y$-Achse parallele Gerade, die die Fläche $F$ in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Ermitteln Sie den Wert $m$. (5 P)


t
y
f
$g_{a;b}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
0 50 100 150 200 250 300 350 400

| **Erwartete Schülerleistung** | Bewertung Zuordnung I | II | III |
|---|---|---|---|
| **Teilaufgabe a)**<br>Aus der Grafik entnimmt man $f(6) \approx 250$, also beträgt die Temperatur sechs Minuten nach Beginn der Messung ungefähr $250\,^\circ\mathrm{C}$.<br>Durch Anlegen einer Tangente und Bestimmung der Steigung ermittelt man mit Hilfe der Grafik $f'(6) \approx \frac{250}{4}$, also beträgt die momentane Temperaturänderungsrate sechs Minuten nach Beginn der Messung ungefähr $62{,}5\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$. | 1<br>3 | | |
| Zu ermitteln ist das globale Maximum von $f$ im Intervall $[0;9]$.<br>Notwendig für eine lokale Extremstelle $t$ von $f$ ist $f'(t)=0$.<br>Es gilt $f'(t) = -4\,t^3 + 56\,t^2 - 224\,t + 256$.<br>$f'(t)=0 \;\Leftrightarrow\; -4\,t^3+56\,t^2-224\,t+256=0 \;\Leftrightarrow\; t=2 \vee t=4 \vee t=8$<br>Da zusätzlich $f(0)=8,\ f(2)\approx 205{,}33,\ f(4)\approx 178{,}67,\ f(8)\approx 349{,}33$ und $f(9)=287$ gilt, beträgt die maximale Temperatur im Grill ungefähr $349\,^\circ\mathrm{C}$. | 4<br>2 | | |
| $\frac{1}{9}\int\limits_0^9 f(t)\,dt = \frac{1}{9}\int\limits_0^9 -t^4+\frac{56}{3}\,t^3-112\,t^2+256\,t+8\,dt = \frac{1129}{5} = 225{,}8$<br>Die durchschnittliche Temperatur über dem Zeitintervall $[0;9]$ beträgt $225{,}8\,^\circ\mathrm{C}$. | | 3 | |
| Wegen $f'(0)=256$ beträgt die momentane Temperaturänderungsrate zu Beginn des Grillvorgangs $256\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$. Da $256\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{min}} \approx 4{,}27\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{s}} < 5\,\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$ ist, trifft die Behauptung des Herstellers bei diesem Grillvorgang nicht zu. | | 3 | |
| **Teilaufgabe b)**<br>Wegen $a>0$ und $b>0$ gilt $g'_{a;b}(t) = -a\cdot b\cdot e^{-b\cdot(t-9)} < 0$ für alle $t$. Somit fallen die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$ für alle $a>0$ und $b>0$ an jeder Stelle $t$. | | 2 | |
| Da die Graphen der Funktionen $g''_{a;b}$ für alle positiven $a$ und $b$ vollständig oberhalb der $t$-Achse verlaufen, gilt $g''_{a;b}(t) > 0$ für alle $t$. Also sind die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$ an jeder Stelle $t$ linksgekrümmt. | | | 2 |
| $\left\lvert\begin{array}{l} g_{a;b}(9)=f(9) \\ g'_{a;b}(9)=f'(9) \end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{l} a\cdot e^{-b\cdot(9-9)}+7=287 \\ -a\cdot b\cdot e^{-b\cdot(9-9)}=-140 \end{array}\right\rvert$<br>$\Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{l} a+7=287 \\ -a\cdot b=-140 \end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{l} a=280 \\ b=0{,}5 \end{array}\right\rvert$ | | 3<br>2 | |

| **Erwartete Schülerleistung** | Bewertung Zuordnung I | II | III |
|---|---|---|---|
| **Teilaufgabe c)**<br>Es gilt $g'(t) = -140 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)}$ und<br>$\dfrac{g(20)-g(9)}{11} = \dfrac{280 \cdot e^{-5{,}5} + 7 - 287}{11} \approx -25{,}35.$ | 2 | | |
| Aus $g'(t) = \dfrac{g(20)-g(9)}{11} \Leftrightarrow -140 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)} = \dfrac{280 \cdot e^{-5{,}5} + 7 - 287}{11}$<br>folgt $t \approx 12{,}42$.<br>Nach ungefähr $12{,}42$ Minuten ist der Zeitpunkt erreicht, an dem die momentane Temperaturänderungsrate gleich der mittleren Temperaturänderungsrate der gesamten Abkühlungsphase ist. | | 2 | |
| $g(t) = g(t+2) + 100$<br>$\Leftrightarrow\ 280 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)} + 7 = 280 \cdot e^{-0{,}5\cdot((t+2)-9)} + 7 + 100$<br>Es folgt $t \approx 10{,}14$. Das Zeitintervall, in dem die Temperatur um genau $100\,^\circ\mathrm{C}$ sinkt, beginnt nach ungefähr $10{,}14$ Minuten und endet nach ungefähr $12{,}14$ Minuten. | | | 3 |
| **Teilaufgabe d)**<br>$\int\limits_0^9 f(t)\,dt + \int\limits_9^{20} g(t)\,dt$<br>$= \int\limits_0^9 -t^4 + \frac{56}{3}\,t^3 - 112\,t^2 + 256\,t + 8\,dt + \int\limits_9^{20} 280 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)} + 7\,dt$<br>$\approx 2032{,}2 + 634{,}71 = 2666{,}91$ | | 3 | |
| $\int\limits_0^m f(t)\,dt = \dfrac{2666{,}91}{2} = 1333{,}455$ | | | 2 |
| $\Leftrightarrow\ \int\limits_0^m -t^4 + \frac{56}{3}\,t^3 - 112\,t^2 + 256\,t + 8\,dt = 1333{,}455$<br>$\Leftrightarrow\ \left[-\frac{1}{5}\,t^5 + \frac{14}{3}\,t^4 - \frac{112}{3}\,t^3 + 128\,t^2 + 8\,t\right]_0^m = 1333{,}455$<br>$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{5}\,m^5 + \frac{14}{3}\,m^4 - \frac{112}{3}\,m^3 + 128\,m^2 + 8\,m = 1333{,}455$<br>Es folgt $m \approx 6{,}90$. | | | 3 |
| Punktsummen | 12 | 18 | 10 |

## Aufgabe 1: Analysis-CAS

Gegeben ist die Funktion $f$ mit

$$f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$$

mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

a) a1) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von $f$ und bestimmen Sie die Art der Extrempunkte.
[zur Kontrolle: Die Extremstellen sind $20$, $100$ und $200$. ] (5 P)

a2) Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von $f$ mit der $y$-Achse an. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass $f$ genau zwei Nullstellen hat. (4 P)

a3) Für $50 < x < 130$ gibt es ein Paar von $x$-Werten, die sich um $60$ unterscheiden und für die die zugehörigen Funktionswerte übereinstimmen.
Bestimmen Sie dieses Paar von $x$-Werten und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an. (4 P)

b) Der Graph von $f$ schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein.

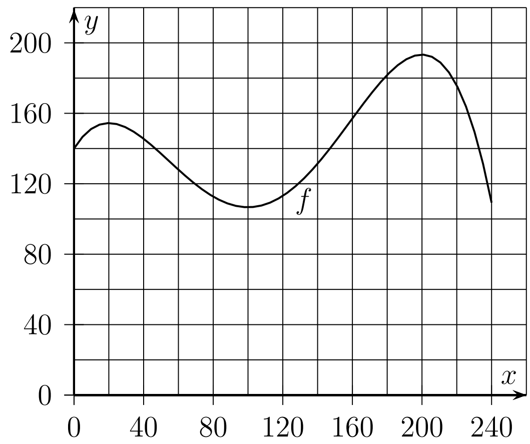
b1) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die parallel zur $y$-Achse verläuft und dieses Flächenstück halbiert. (4 P)

Für jedes $x$ mit $0 < x \leq 240$ ist durch $A(0\,|\,0)$, $B_x(x\,|\,0)$ und $C_x(x\,|\,f(x))$ ein Dreieck $AB_xC_x$ gegeben.
Ferner ist die Funktion $d$ mit $d(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$ gegeben.
Die Gleichung $d'(x) = 0$ hat genau eine Lösung $u$ mit $0 < u \leq 240$.

b2) Berechnen Sie $d(u)$. (2 P)

b3) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung der Funktionswerte $d(x)$.
Untersuchen Sie die besondere Bedeutung des Wertes $d(u)$ in diesem Zusammenhang. (4 P)

Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mithilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d.h. die Glukosekonzentration im Blut, ständig zu messen. Die oben gegebene Funktion $f$ beschreibt für $0 \leq x \leq 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist $x$ die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter ($\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von $f$.




c) c1) Hohe Glukosewerte über längere Zeit gelten als Risikofaktor. Ermitteln Sie anhand der Grafik für den betrachteten Zeitraum, wie lange Glukosewerte über $170\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ gemessen werden. (3 P)

c2) Berechnen Sie für $0 \leq x \leq 240$ denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt. (4 P)

c3) Ermitteln Sie rechnerisch für $0 \leq x \leq 240$, wie lange die momentane Änderungsrate des Glukosewerts insgesamt zwischen $-0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute und $0{,}3\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ pro Minute lag. (4 P)

d) Zum Zeitpunkt $240$ Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Patient Traubenzucker zu sich. Die anschließende Entwicklung des Glukosewerts soll im Modell mithilfe einer Funktion $g$ beschrieben werden, die folgende Bedingung erfüllt:

*Die beiden Werte, die das Modell zum Zeitpunkt $240$ Minuten nach Beobachtungsbeginn für den Glukosewert und für dessen momentane Änderungsrate liefert, sollen unabhängig davon sein, ob sie mithilfe der Funktion $f$ oder mithilfe der Funktion $g$ ermittelt werden.*

Zur Bestimmung eines Funktionsterms von $g$ sollen zunächst die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k$ mit

$$h_k(x) = 50 - 50 \cdot (k \cdot x + 1)^2 \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot x} \quad \text{mit } k > 0$$

betrachtet werden.

d1) Bestimmen Sie den Wert von $k$ so, dass die momentane Änderungsrate, die sich unter Verwendung von $h_k$ für den Zeitpunkt $0$ ergibt, mit der momentanen Änderungsrate übereinstimmt, die $f$ für den Zeitpunkt $240$ Minuten nach Beobachtungsbeginn liefert. (2 P)

d2) Die für die Funktion $g$ angegebene Bedingung lässt sich erfüllen, wenn der Graph von $g$ durch eine geeignete Verschiebung aus dem Graphen von $h_k$ für $k = \frac{308}{3125}$ hervorgeht. Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie einen Funktionsterm von $g$ an. (4 P)

| Erwartete Schülerleistung | Bewertung Zuordnung I | II | III |
|---|---|---|---|
| **Teilaufgabe a)**<br>Notwendig für eine lokale Extremstelle $x$ von $f$ ist $f'(x) = 0$.<br>Es gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20 \vee x = 100 \vee x = 200$.<br>Mit $f''(20) = -\frac{36}{625} < 0$, $f''(100) = \frac{4}{125} > 0$ und $f''(200) = -\frac{9}{125} < 0$ folgt, dass der Graph von $f$ die Hochpunkte $H_1(20 \mid \frac{11584}{75})$, $H_2(200 \mid \frac{580}{3})$ und den Tiefpunkt $T(100 \mid \frac{320}{3})$ besitzt. | 1<br>1<br>2<br><br>1 | | |
| Der Schnittpunkt mit der $y$-Achse ist $S(0 \mid 140)$.<br>Da $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ gilt und die $y$-Koordinate des einzigen Tiefpunkts des Graphen von $f$ positiv ist, hat $f$ genau zwei Nullstellen. | 1<br><br>3 | | |
| Für $50 < x < 130$ gilt $f(x) = f(x+60) \Leftrightarrow x \approx 69{,}1528$.<br>Die gesuchten $x$-Werte sind ca. $69{,}2$ und $129{,}2$, der zugehörige Funktionswert etwa $120{,}2$. | | 4 | |
| **Teilaufgabe b)**<br>Der Ansatz $\int\limits_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_k^{240} f(x)\,\mathrm{d}x$ liefert<br>$k \approx -93{,}1605$ oder $k \approx 135{,}4608$ oder $k \approx 308{,}9161$,<br>d.h. die Gerade wird näherungsweise durch die Gleichung $x = 135{,}5$ beschrieben. | | 4 | |
| $d'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 210{,}6268 \vee x \approx -19{,}9266$<br>Also ist $u \approx 210{,}63$ und damit $d(u) \approx d(210{,}6268) \approx 19883{,}9$. | | 2 | |
| Für $0 < x \leq 240$ entspricht der Funktionswert $d(x)$ dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks $AB_xC_x$ mit rechtem Winkel bei $B_x$.<br>Da $u$ die einzige Stelle im Intervall $[0\,;\,240]$ ist, an der die erste Ableitung der Funktion $d$ den Wert Null annimmt,<br>ferner $d(240) = 13113{,}6 < 19883{,}9 \approx d(u)$ und $d(x) \to 0$ für $x \to 0$ gilt, nimmt die Funktion $d$ an der Stelle $u$ den maximalen Funktionswert über dem durch die Bedingung $0 < x \leq 240$ gegebenen Intervall an.<br>Entsprechend ist das Dreieck $AB_uC_u$ dasjenige mit maximalem Flächeninhalt. | | 2 | 2 |
| **Teilaufgabe c)**<br>Mithilfe des Graphen von $f$ und der Geraden mit der Gleichung $y = 170$ ergibt sich, dass Glukosewerte über $170\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{dl}}$ zwischen 170 Minuten und 223 Minuten nach Beobachtungsbeginn und damit 53 Minuten lang gemessen wurden. | 3 | | |

| Erwartete Schülerleistung | Bewertung Zuordnung I | II | III |
|---|---|---|---|
| Die größte Steigung liegt an einer Wendestelle von $f$ oder den Rändern des Intervalls $[0\,;\,240]$ vor.<br>$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20(16+\sqrt{61})}{3} \approx 158{,}735 \vee x = \frac{20(16-\sqrt{61})}{3} \approx 54{,}598$<br>Da zusätzlich $f'(158{,}735) \approx 1{,}345$, $f'(54{,}598) \approx -0{,}914$, $f'(0) = 1{,}6$ und $f'(240) = -4{,}928$ ist, steigt der Glukosewert zu Beobachtungsbeginn am stärksten an. | | 2<br>2 | |
| Mit $\lvert f'(x)\rvert \leq 0{,}3$ ergibt sich, dass die momentane Änderungsrate des Glukosewerts in den folgenden Zeiträumen zwischen den angegebenen Werten lag:<br>• von etwa $15{,}2$ Minuten bis etwa $25{,}8$ Minuten<br>• von etwa $90{,}3$ Minuten bis etwa $109{,}3$ Minuten<br>• von etwa $195{,}5$ Minuten bis etwa $203{,}9$ Minuten<br>Damit liegt die momentane Änderungsrate insgesamt etwa $38$ Minuten lang im angegebenen Bereich. | | | 4 |
| **Teilaufgabe d)**<br>$h_k'(0) = f'(240) \Leftrightarrow k = \frac{308}{3125}$ | | 2 | |
| Der Graph von $g$ geht aus dem Graph von $h_{\frac{308}{3125}}$ durch eine Verschiebung um $240$ in positive $x$-Richtung und um $f(240)$ in positive $y$-Richtung hervor.<br>$g(x) = h_{\frac{308}{3125}}(x-240) + f(240)$ | | | 4 |
| Punktsummen | 12 | 18 | 10 |

## Aufgabe 2: Analysis-CAS

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_r$ mit $f_r(x) = -\frac{1}{r} \cdot x^2 + \frac{4}{r} \cdot x + 2$ und $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) a1) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem den Graphen von $f_6$ über dem Intervall $[-3\,;\,7]$. (2 P)

a2) Betrachtet wird der folgende Term:

$$\int_{-2}^{0} f_6(x)\,\mathrm{d}x + 4 \cdot 2 + \int_{4}^{6} f_6(x)\,\mathrm{d}x$$

Markieren Sie in Ihrer Skizze zu Teilaufgabe a1) ein Flächenstück, dessen Inhalt mit dem gegebenen Term berechnet werden kann, und ordnen Sie jedem Summanden des Terms einen passenden Teil dieses Flächenstücks zu. Geben Sie den Inhalt des Flächenstücks an. (4 P)

a3) Zeigen Sie, dass jede Funktion der Schar an der Stelle $2$ ein Extremum hat. Geben Sie in Abhängigkeit von $r$ an, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt, und nennen Sie den zugehörigen Funktionswert. (4 P)

a4) Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von $f_r$ in Abhängigkeit von $r$. (4 P)

b) Für $r > -2$ und $r \neq 0$ sind $A_r(2 - \sqrt{4+2r}\,|\,0)$, $B_r(2 + \sqrt{4+2r}\,|\,0)$ und $C(4\,|\,2)$ Punkte des Graphen von $f_r$.

b1) Es soll untersucht werden, für welche Werte von $r$ das Dreieck $A_rB_rC$ einen rechten Winkel bei $C$ hat.
Jeder der beiden folgenden Ansätze liefert die gesuchten Werte von $r$:

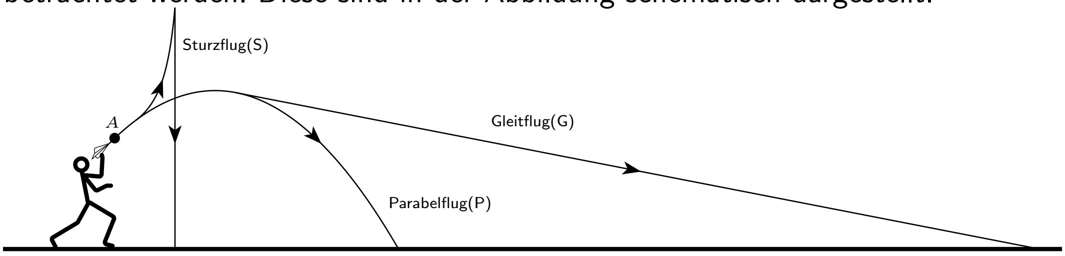
(1) $$\begin{pmatrix} -\sqrt{4+2r} - 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sqrt{4+2r} - 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

(2) $$\frac{2}{2+\sqrt{4+2r}} \cdot \frac{2}{2-\sqrt{4+2r}} = -1$$

Erläutern Sie die beiden Ansätze und geben Sie einen entsprechenden Wert für $r$ an. (5 P)

b2) Der Graph der Funktion $f_r$ schließt gemeinsam mit der $x$-Achse eine Fläche $F_r$ ein. Ermitteln Sie einen Wert für $r$, für den der Flächeninhalt der Fläche $F_r$ viermal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks $A_rB_rC$. (3 P)

Im Folgenden sollen für den Flug von Papierfliegern drei mögliche Typen von Flugkurven betrachtet werden. Diese sind in der Abbildung schematisch dargestellt.




Wird die Größe der betrachteten Papierflieger vernachlässigt, können die Flugkurven bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen $x$-Achse entlang des horizontalen Bodens und dessen $y$-Achse durch den Abwurfpunkt $A$ verläuft, modellhaft mithilfe von Funktionen beschrieben werden. Der $x$-Wert soll im Folgenden der horizontalen Entfernung des Papierfliegers vom Abwurfpunkt $A$ entsprechen, der zugehörige Funktionswert der Flughöhe (jeweils in Metern).

c) Ein Papierflieger bewegt sich entlang einer Flugkurve vom Typ P. Diese kann für $x \geq 0$ mithilfe der gegebenen Funktion $f_4$ beschrieben werden. Weisen Sie nach, dass die Flugweite etwa $5{,}46\,\mathrm{m}$ beträgt. (2 P)

d) Im Folgenden wird ein Papierflieger betrachtet, der sich entlang einer Flugkurve des Typs S bewegt. Diese kann im ersten Teil mit Hilfe der Funktion $f_4$ beschrieben werden, im zweiten Teil ab einer horizontalen Entfernung von $0{,}5\,\mathrm{m}$ vom Abwurfpunkt mithilfe einer Funktion $s$ mit $s(x) = \frac{a}{x-1{,}5} + b$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dabei weist die Flugkurve bis zum höchsten Punkt keinen Knick auf. Der Papierflieger steigt, bis er einen Steigungswinkel mit einer Größe von $85°$ erreicht und stürzt dann vertikal ab.

d1) Bestimmen Sie die Werte von $a$ und $b$. (3 P)

Im Folgenden ist $a = -0{,}75$ und $b = 1{,}6875$.

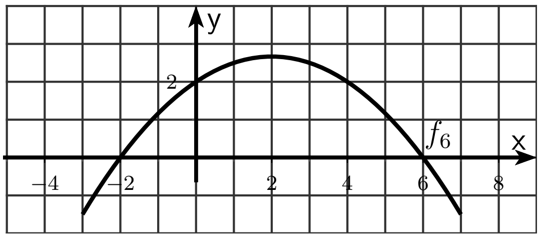
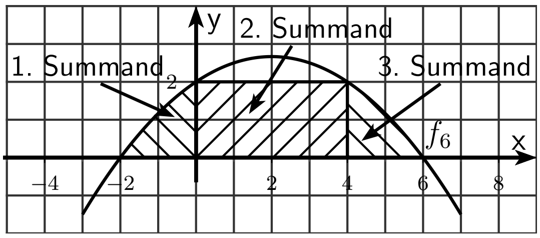
d2) Berechnen Sie die horizontale Entfernung $e$ vom Abwurfpunkt, in der der Papierflieger den Steigungswinkel mit einer Größe von $85°$ erreicht.
$\left[\text{zur Kontrolle: } e \approx 1{,}24\right]$ (3 P)

d3) Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[x_0;\, x_1]$ mit $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ definierten Funktion $h$ mit erster Ableitungsfunktion $h'$, so gilt für die Länge $L$ des Kurvenstücks:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Ermitteln Sie die Länge der beschriebenen Flugkurve vom Typ S. (5 P)

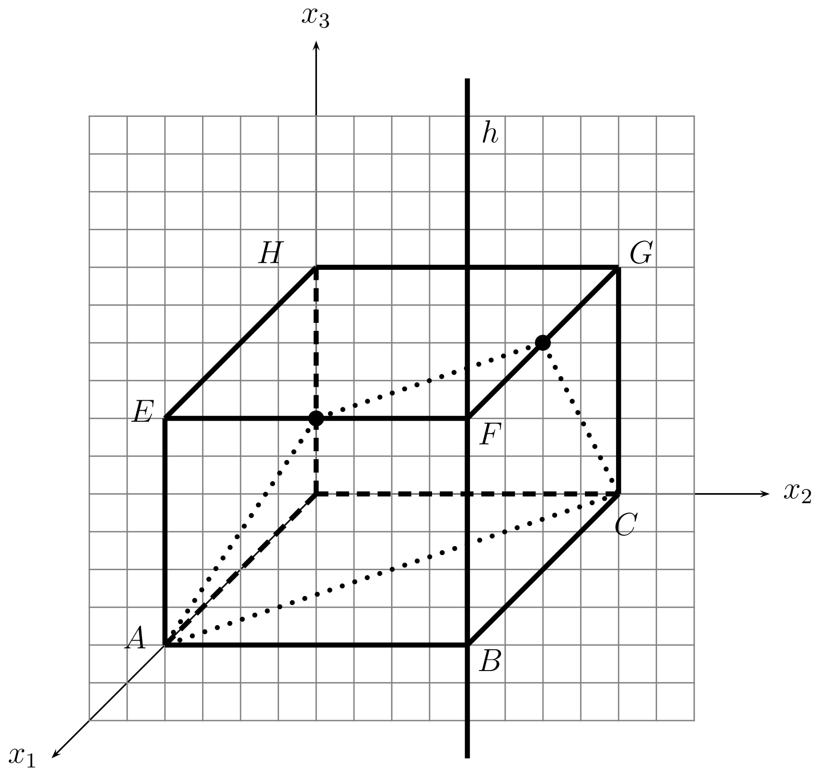
e) Die größten Flugweiten erzielen Papierflieger mit der Flugkurve des Typs G. Eine solche Flugkurve lässt sich im ersten Teil mithilfe der Funktion $f_4$ beschreiben. Ab einem bestimmten Punkt kann der weitere Verlauf der Flugkurve bis zum Boden durch eine Gerade dargestellt werden. Der Übergang vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve erfolgt ohne Knick. Die Flugweite beträgt $17{,}6\,\mathrm{m}$.
Ermitteln Sie, in welcher Höhe der gekrümmte Teil der Flugkurve in den geradlinigen übergeht. (5 P)

| Erwartete Schülerleistung | Bewertung Zuordnung I | II | III |
|---|---|---|---|
| **Teilaufgabe a)**<br> | 2 | | |
| <br>Das Flächenstück hat den Flächeninhalt $\frac{112}{9} = 12\frac{4}{9}$. | 4 | | |
| Notwendig für eine Extremstelle $x$ von $f_r$ ist $f_r'(x) = 0$.<br>Es gilt $f_r'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ und $f_r(2) = \frac{4}{r} + 2$.<br>Für $r > 0$ beschreibt $f_r$ eine nach unten geöffnete Parabel, für $r < 0$ eine nach oben geöffnete.<br>Entsprechend hat $f_r$ an der Stelle $2$ für $r < 0$ ein Minimum, für $r > 0$ ein Maximum. | 2<br>2 | | |
| $f_r(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{4+2r} \vee x = 2 + \sqrt{4+2r}$<br>Da $4 + 2r > 0 \Leftrightarrow r > -2$ und $4 + 2r = 0 \Leftrightarrow r = -2$, hat $f_r$ für $r = -2$ genau eine Nullstelle, für $r > -2$ genau zwei und für $r < -2$ keine Nullstellen. | | 2<br>2 | |
| **Teilaufgabe b)**<br>(1) Die beiden Vektoren $\overrightarrow{CA_r}$ und $\overrightarrow{CB_r}$ auf der linken Seite der Gleichung sind die Verbindungsvektoren von $C$ zu $A_r$ bzw. von $C$ zu $B_r$.<br>Ist deren Skalarprodukt null, so ist das Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei $C$.<br>(2) Die beiden Faktoren auf der linken Seite der Gleichung sind die Steigungen der Geraden durch $A_r$ und $C$ bzw. durch $B_r$ und $C$.<br>Ist das Produkt dieser Faktoren $-1$, so schneiden sich diese beiden Geraden rechtwinklig.<br>Damit ist das Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei $C$.<br>Für $r = 2$ ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $C$. | | 2<br>1 | 2 |

| **Erwartete Schülerleistung** | Bewertung Zuordnung I | II | III |
|---|---|---|---|
| Das Dreieck $A_rB_rC$ hat eine Seite der Länge $2\cdot\sqrt{4+2r}$.<br>Die Höhe auf dieser Seite hat die Länge $2$.<br>$F_r = 4\cdot A_\Delta \Leftrightarrow \int\limits_{2-\sqrt{4+2r}}^{2+\sqrt{4+2r}} f_r(x)\,\mathrm{d}x = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{4+2r}\cdot 2 \Leftrightarrow r=1 \lor r=-2$<br>Wegen $r\neq -2$ ist $1$ der gesuchte Wert für $r$. | | | 3 |
| **Teilaufgabe c)**<br>Die Flugweite entspricht der positiven Nullstelle der Funktion $f_4$.<br>$f_4(x)=0 \Leftrightarrow x=2-\sqrt{12} \lor x=2+\sqrt{12}$<br>Damit beträgt die Flugweite ca. $5{,}46\,\mathrm{m}$. | 2 | | |
| **Teilaufgabe d)**<br>Für einen sprung- und knickfreien Übergang vom Graphen von $f_4$ zum Graphen von $s$ an der Stelle $0{,}5$ muss $s(0{,}5)=f_4(0{,}5)$ und $s'(0{,}5)=f_4'(0{,}5)$ gelten.<br>$\left\lvert\begin{array}{rcl} s(0{,}5) & = & f_4(0{,}5)\\ s'(0{,}5) & = & f_4'(0{,}5)\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{rcl} a & = & -0{,}75\\ b & = & 1{,}6875\end{array}\right\rvert$ | | 3 | |
| Aus $s'(x)=\tan(85°)$ ergibt sich $x\approx 1{,}244$ oder $x\approx 1{,}756$.<br>Der Papierflieger erreicht also bereits nach ca. $1{,}24\,\mathrm{m}$ den kritischen Steigungswinkel von $85°$. | | 2<br>1 | |
| Die Flugkurve muss abschnittsweise für die Intervalle $[0\,;\,0{,}5]$, $[0{,}5\,;\,1{,}24]$ und an der Stelle $1{,}24$ betrachtet werden.<br>Die Berechnung der Länge der Flugkurve inklusive des vertikalen Falls liefert<br>$\int\limits_0^{0{,}5}\sqrt{1+(f_4'(x))^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0{,}5}^{1{,}24}\sqrt{1+(s'(x))^2}\,\mathrm{d}x + s(1{,}24)\approx 7{,}56.$<br>Die Flugkurve ist also ca. $7{,}56\,\mathrm{m}$ lang. | | 2<br>3 | |
| **Teilaufgabe e)**<br>Der Graph zu $f_4$ geht an der Stelle $x_s$ mit $x_s<17{,}6$ sprung- und knickfrei in eine Gerade $g$ mit $g(x)=m\cdot x+n$ und $g(17{,}6)=0$ über.<br>$\left\lvert\begin{array}{rcl} g(17{,}6) & = & 0\\ g(x_s) & = & f_4(x_s)\\ g'(x_s) & = & f_4'(x_s)\end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{rcl} x_s & \approx & 2{,}389\\ m & \approx & -0{,}195\\ n & \approx & 3{,}427\end{array}\right\rvert$<br>An der Stelle $2{,}39$ nimmt $f_4$ ungefähr den Funktionswert $2{,}96$ an.<br>Also geht der gekrümmte Teil der Flugbahn des Papierfliegers in einer Höhe von ca. $2{,}96\,\mathrm{m}$ in den geradlinigen über. | | | 5 |
| Punktsummen | 12 | 18 | 10 |

## Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,4\,|\,0)$ , $C(0\,|\,4\,|\,0)$, $F(4\,|\,4\,|\,3)$ und $H(0\,|\,0\,|\,3)$ sind Eckpunkte des abgebildeten Quaders. Die Gerade $h$ verläuft durch $B$ und $F$.




a) a1) Begründen Sie, dass das Dreieck $ABC$ rechtwinklig und gleichschenklig ist. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks an. (3 P)

a2) Geben Sie eine Gleichung der Geraden $g$ an, die durch $A$ und $C$ verläuft. Begründen Sie, dass diese Gerade windschief zur Geraden $h$ ist. (3 P)

a3) Bestimmen Sie den Abstand von $g$ zur Geraden durch $B$ und $H$. (5 P)

a4) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $ACH$. (3 P)

b) Die Punkte der Geraden $h$ lassen sich durch $P_t(4\,|\,4\,|\,t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen. Für jeden Wert von $t$ liegen $A$, $C$ und $P_t$ in der Ebene $E_t : t \cdot x_1 + t \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 - 4 \cdot t = 0$.

b1) Ermitteln Sie diejenigen Werte von $t$, für die die zugehörige Ebene $E_t$ mit der $x_1x_2$-Ebene einen Winkel der Größe $60°$ einschließt. (4 P)

Der abgebildete Quader wird durch eine der Ebenen $E_t$ in zwei Teilkörper zerlegt. Die Seiten der Schnittfigur dieser Ebene und des Quaders sind in der Abbildung gepunktet dargestellt.

b2) Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung den Wert von $t$ ermitteln kann. (3 P)

b3) Es ist $t = 6$. Berechnen Sie das Volumen desjenigen der beiden Teilkörper, zu dem der Punkt $B$ gehört, und erläutern Sie Ihr Vorgehen. (5 P)

Es gibt Werte von $t$, für die die Schnittfigur des Quaders und der Ebene $E_t$ die Form eines Dreiecks hat.

b4) Geben Sie alle diese Werte von $t$ an und beschreiben Sie in Abhängigkeit von $t$ die Lage der Eckpunkte des Dreiecks. (4 P)

c) Es sei jetzt $t > 3$. $Q_t$ sei der Schnittpunkt von $E_t$ mit der Strecke $\overline{EF}$ und $R_t$ sei der Schnittpunkt von $E_t$ mit der Strecke $\overline{FG}$ .

c1) Berechnen Sie die Koordinaten von $Q_t$.

[Kontrolle: $Q_t(4 \mid \frac{12}{t} \mid 3)$] (4 P)

c2) Geben Sie die Koordinaten von $R_t$ an und berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{Q_t R_t}$ in Abhängigkeit von $t$. (3 P)

d) Die folgende Aussage stellt die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den bisher betrachteten geometrischen Objekten dar:

$$\left|\frac{t \cdot 4 + t \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot t}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}}\right| = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = -2\,\sqrt{2} \quad \vee \quad t = 2\,\sqrt{2}$$

Formulieren Sie eine dazu passende Aufgabenstellung. (3 P)

| **Erwartete Schülerleistung** | Bewertung Zuordnung | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| **Teilaufgabe a)**<br>Es gilt $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 4$ und $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = 4$. Also ist das Dreieck $ABC$ gleichschenklig. Da es sich um einen Quader handelt, ist das Dreieck $ABC$ rechtwinklig. Der Flächeninhalt beträgt $8$. | 3 | | |
| $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | 1 | | |
| Die Gerade $h$ hat mit der $x_1x_2$-Ebene nur den Punkt $B$ gemeinsam. Die Gerade $g$ durch $A$ und $C$ liegt in der $x_1x_2$-Ebene und verläuft nicht durch $B$. Daher sind $g$ und $h$ windschief. | 2 | | |
| Eine Gleichung der Geraden $l$ durch $B$ und $H$ ist gegeben durch<br>$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$. | 1 | | |
| Wegen $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Vektor, der zu beiden Richtungsvektoren orthogonal ist. | 2 | | |
| Damit folgt<br>$d(l,g) = \left\lvert \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{82}} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{82}} \right\rvert$<br>$= \frac{12}{\sqrt{82}} \approx 1{,}33.$ | 2 | | |
| $A_{ACH} = \frac{1}{2} \cdot \left\lvert \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AH} \right\rvert = \frac{1}{2} \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rvert = \frac{1}{2} \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} \right\rvert$<br>$= 2 \cdot \sqrt{34} \approx 11{,}66$ | | 3 | |
| **Teilaufgabe b)**<br>$\cos(60^\circ) = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} t \\ t \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{2t^2 + 16}}$<br>$\Leftrightarrow 2t^2 + 16 = 64 \Leftrightarrow t = -\sqrt{24} \approx -4{,}90 \lor t = \sqrt{24} \approx 4{,}90$ | | 4 | |

| **Erwartete Schülerleistung** | Bewertung Zuordnung I | II | III |
|---|---|---|---|
| Verlängert man eine der beiden nicht-parallelen Seiten der Schnittfigur geradlinig so, dass die Verlängerung die Gerade $h$ schneidet, so stimmt die $x_3$-Koordinate des Schnittpunkts mit dem Wert von $t$ überein. | | 3 | |
| Für das Volumen $V_1$ der Pyramide $ABCP_6$ gilt $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot 6 = 16$. Für das Volumen $V_2$ der Pyramide, die den betrachteten Teilkörper zur Pyramide $ABCP_6$ ergänzt, gilt $V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 3 = 2$. Also folgt für das Volumen $V_{TK}$ des betrachteten Teilkörpers $V_{TK} = V_1 - V_2 = 16 - 2 = 14$. | | 5 | |
| $t \in [-3; 3] \backslash \{0\}$<br>Zwei der Eckpunkte sind stets die Punkte $A$ und $C$. Für $0 < t \leq 3$ liegt der dritte Eckpunkt auf der Seitenkante $\overline{BF}$ des Quaders, für $-3 \leq t < 0$ auf der gegenüberliegenden Seitenkante $\overline{OH}$ . | | | 4 |
| **Teilaufgabe c)**<br>Eine Gleichung der Geraden $k$ durch $E$ und $F$ lautet<br>$k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . | 1 | | |
| $k \cap E_t : t \cdot 4 + t \cdot r - 4 \cdot 3 - 4 \cdot t = 0 \;\Leftrightarrow\; t \cdot r = 12 \;\Leftrightarrow\; r = \dfrac{12}{t}$<br>Wegen $\overrightarrow{OQ_t} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{12}{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{12}{t} \\ 3 \end{pmatrix}$ hat der Schnittpunkt die Koordinaten $Q_t(4 \mid \frac{12}{t} \mid 3)$. | | 3 | |
| Aus Symmetriegründen hat $R_t$ die Koordinaten $R_t(\frac{12}{t} \mid 4 \mid 3)$. Mit dem Satz des Pythagoras folgt $\lvert\overrightarrow{Q_tR_t}\rvert = \sqrt{2 \cdot \left(4 - \frac{12}{t}\right)^2}$. | | | 3 |
| **Teilaufgabe d)**<br>Bestimmen Sie diejenigen Werte von $t$, für die der Punkt $B(4 \mid 4 \mid 0)$ und die Ebene $E_t$ den Abstand $2$ haben. | | | 3 |
| Punktsummen | 12 | 18 | 10 |

## Aufgabe 4: Stochastik

**Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.**

Eine Firma stellt Flachbildschirme her. Im Mittel ist einer von fünf hergestellten Bildschirmen fehlerhaft.

a) Es soll angenommen werden, dass die Anzahl fehlerhafter Geräte unter zufällig ausgewählten Bildschirmen durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von 50 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind höchstens 8 fehlerhaft."

B: „Von 200 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind mehr als 15 % und weniger als 25 % fehlerhaft."

C: „Von 10 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind genauso viele fehlerhaft, wie zu erwarten ist."

(8 P)

b) Fehler der Bildschirme treten am häufigsten in Form eines defekten Displays sowie in Form eines defekten Netzteils auf. Für einen zufällig ausgewählten Bildschirm beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- das Display defekt ist, 10,7 %,
- das Display und das Netzteil defekt sind, 1 %,
- weder das Display noch das Netzteil defekt ist, 87,3 %.

b1) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. (4 P)

b2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder das Display oder das Netzteil defekt ist. (2 P)

b3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bildschirm mit einem defekten Netzteil ein nicht-defektes Display hat. (2 P)

b4) Untersuchen Sie, ob die beiden betrachteten Defekte unabhängig voneinander auftreten. (3 P)

c) Ein Mitarbeiter der Firma bezweifelt, dass im Mittel einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft ist. Um einen Schätzwert für den Anteil fehlerhafter Geräte zu ermitteln, zieht er eine Stichprobe vom Umfang $180$. In der Stichprobe sind $27$ Bildschirme fehlerhaft.

c1) Zeigen Sie, dass der Mitarbeiter bei diesem Testergebnis die Hypothese „Im Mittel ist einer von fünf Bildschirmen fehlerhaft" auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ nicht verwerfen kann.
Entscheiden Sie, ob die Zweifel des Mitarbeiters damit ausgeräumt sind. (9 P)

Bei hinreichend großem Stichprobenumfang $n$ kann aus der relativen Häufigkeit $h$, die sich bei der Durchführung des Tests ergibt, die Obergrenze $p_{max}$ bzw. Untergrenze $p_{min}$ des $95\,\%$-Konfidenzintervalls folgendermaßen näherungsweise berechnet werden:

$$p_{max} \approx h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \quad ; \quad p_{min} \approx h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}$$

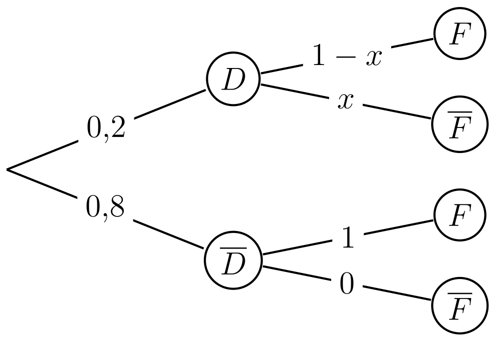
c2) Bestimmen Sie damit das zu dem Testergebnis $27$ gehörende $95\,\%$-Konfidenzintervall. (3 P)

c3) Zeigen Sie mit Hilfe der oben genannten Näherungsformeln allgemein, dass sich die Länge eines $95\,\%$-Konfidenzintervalls bei Verdopplung des Stichprobenumfangs $n$ und gleicher relativer Häufigkeit $h$ verkleinert, aber nicht halbiert. (4 P)

d) Tatsächlich sind $20\,\%$ aller Bildschirme fehlerhaft.
Bei einer abschließenden Prüfung werden alle fehlerfreien Bildschirme auch als fehlerfrei eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fehlerhafter Bildschirm als fehlerhaft eingestuft wird, wird mit $x$ bezeichnet. Ein im Rahmen der Prüfung als fehlerfrei eingestufter Bildschirm wird zufällig ausgewählt.

Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von $x$, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Bildschirm fehlerhaft ist, höchstens $5\,\%$ beträgt. (5 P)

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe a)<br>Die Zufallsgröße $X_n$ beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Bildschirme unter den $n$ ausgewählten. Sie ist binomialverteilt mit den Parametern $n$ und $p = 0{,}2$.<br>$P(A) = P(X_{50} \leq 8) \approx 0{,}3073 = 30{,}73\,\%$<br><br>$P(B) = P(30 < X_{200} < 50)$<br>$= P(X_{200} \leq 49) - P(X_{200} \leq 30) \approx 0{,}9506 - 0{,}0430 = 90{,}76\,\%$<br><br>Mit $E(X_{10}) = 0{,}2 \cdot 10 = 2$ gilt $P(C) = P(X_{10} = 2) \approx 30{,}20\,\%$.</td><td>1<br>2<br><br>3<br><br>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe b)<br>$D$: „Das Display ist defekt.“<br>$N$: „Das Netzteil ist defekt.“<br><br><table><tr><th></th><th>$D$</th><th>$\overline{D}$</th><th></th></tr><tr><td>$N$</td><td>$1\,\%$</td><td>$2\,\%$</td><td>$3\,\%$</td></tr><tr><td>$\overline{N}$</td><td>$9{,}7\,\%$</td><td>$87{,}3\,\%$</td><td>$97\,\%$</td></tr><tr><td></td><td>$10{,}7\,\%$</td><td>$89{,}3\,\%$</td><td>$100\,\%$</td></tr></table></td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$P(N \cap \overline{D}) + P(\overline{N} \cap D) = 2\,\% + 9{,}7\,\% = 11{,}7\,\%$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$P_N(\overline{D}) = \dfrac{P(N \cap \overline{D})}{P(N)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}03} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}667 = 66{,}7\,\%$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>$P(D) \cdot P(N) = 0{,}107 \cdot 0{,}03 = 0{,}00321 \neq 0{,}01 = P(N \cap D)$<br>Die beiden Defekte treten also nicht unabhängig voneinander auf.<br><br>Es ist auch eine Argumentation über bedingte Wahrscheinlichkeiten möglich.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe c)<br>Die Zufallsgröße $X$ beschreibe die Anzahl der defekten Bildschirme unter $180$ ausgewählten. $X$ ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 180$ und $p = 0{,}2$.<br><br>Die Hypothese $H_0 : p = 0{,}2$ ist zweiseitig zu testen.<br>Sie kann auf dem Signifikanzniveau von $5\,\%$ verworfen werden, wenn für das Testergebnis $k$ gilt:<br>$P(X \leq k) \leq 2{,}5\,\%$ oder $P(X \leq k - 1) \geq 97{,}5\,\%$.<br>Hier kann auch der Verwerfungsbereich der Hypothese bestimmt werden.</td><td></td><td>1<br><br>4</td><td></td></tr>
</table>

| **Erwartete Schülerleistung** | Bewertung Zuordnung | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| Wegen $P(X \leq 27) \approx 0{,}053 > 2{,}5\,\%$ und $P(X \leq 26) \approx 0{,}035 < 97{,}5\,\%$ liegt $27$ nicht im Verwerfungsbereich der Hypothese $H_0 : p = 0{,}2$. Damit kann die Hypothese $H_0$ bei diesem Testergebnis nicht auf dem Signifikanzniveau von $5\,\%$ verworfen werden.<br>Das heißt aber auch nicht, dass die Zweifel des Mitarbeiters ausgeräumt sind. | | 3 | 1 |
| Mit $h = \frac{27}{180} = 0{,}15$ gilt<br>$p_{max} \approx 0{,}15 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{180}} \approx 0{,}2022$ und<br>$p_{min} \approx 0{,}15 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{180}} \approx 0{,}0978.$<br>Damit ist das $95\,\%$-Konfidenzintervall zum Testergebnis $27$ etwa das Intervall $[9{,}78\,\%; 20{,}22\,\%]$. | | 3 | |
| Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Länge $l$ des $95\,\%$-Konfidenzintervalls gegeben durch<br>$l = p_{max} - p_{min} = 2 \cdot 1{,}96\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}} = \frac{3{,}92 \cdot \sqrt{h\cdot(1-h)}}{\sqrt{n}}.$<br>Bei festem $h$ ist $l$ also umgekehrt proportional zur Wurzel aus $n$, bei Verdopplung von $n$ sinkt $l$ also nur auf das $\frac{1}{\sqrt{2}}$-fache des Ausgangswertes und wird damit nicht halbiert. | | | 4 |
| **Teilaufgabe d)**<br>$D$: Bildschirm ist defekt<br>$F$: Bildschirm ist als fehlerfrei eingestuft.<br><br>*Das Baumdiagramm muss vom Prüfling nicht gezeichnet werden.*<br>$P_F(D) = \dfrac{P(D \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}2 \cdot (1-x)}{0{,}8 + 0{,}2 \cdot (1-x)} \leq 0{,}05$<br>$\Leftrightarrow 0{,}2 \cdot (1-x) \leq 0{,}05 \cdot (0{,}8 + 0{,}2 \cdot (1-x)) \Leftrightarrow x \geq \dfrac{15}{19}$<br>Der kleinstmögliche Wert von $x$ ist $\frac{15}{19}$. | | | 5 |
| Punktsummen | 12 | 18 | 10 |