Auswahlbogen für Prüflinge
HMF-Aufgaben

Name: ______________________________
(in Druckbuchstaben)

Bearbeiten Sie aus den Ihnen vorliegenden HMF-Aufgaben
alle vier Aufgaben aus Pool 1, also

HMF 1, HMF 2, HMF 3, HMF 4.

Wählen Sie zusätzlich **genau zwei** der sechs Aufgaben aus Pool 2 durch Ankreuzen aus. Dabei dürfen Sie auch aus demselben Sachgebiet auswählen.

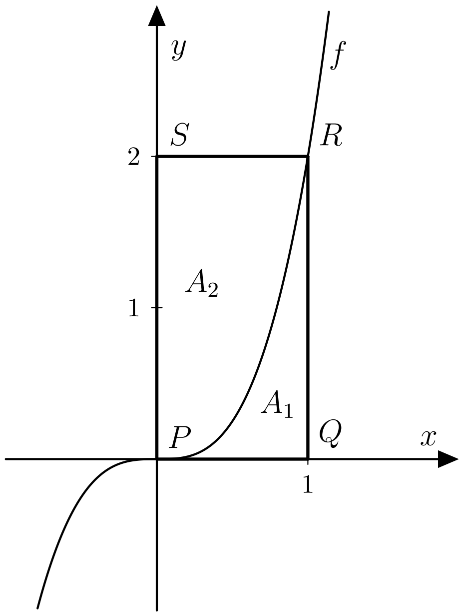
Aus Pool 2 habe ich folgende zwei Aufgaben ausgewählt:

- ☐ HMF 5
- ☐ HMF 6
- ☐ HMF 7
- ☐ HMF 8
- ☐ HMF 9
- ☐ HMF 10

Hinweis: Es müssen genau zwei Kreuze gesetzt werden. In die Bewertung der Abiturprüfung fließt nur die Bearbeitung der vier Aufgaben aus Pool 1 und die der zwei gewählten Aufgaben aus Pool 2 ein.

____
Unterschrift des Prüflings

HMF 1 - Analysis (Pool 1)



Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2\,x^3$ und das Rechteck $PQRS$ mit $P(0|0)$, $Q(1|0)$, $R(1|2)$, $S(0|2)$.

Der Graph teilt das Rechteck in zwei Flächen, deren Flächeninhalte mit A_1 und A_2 bezeichnet sind.

1.1 Zeigen Sie, dass der Punkt R auf dem Graphen von f liegt.

(1 BE)

1.2 Berechnen Sie A_1 und A_2.

(4 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$f(1) = 2$ 1 BE
1.2	$A_1 = \int_0^1 2\,x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ $A_2 = 2 - A_1 = \frac{3}{2}$ 4 BE

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

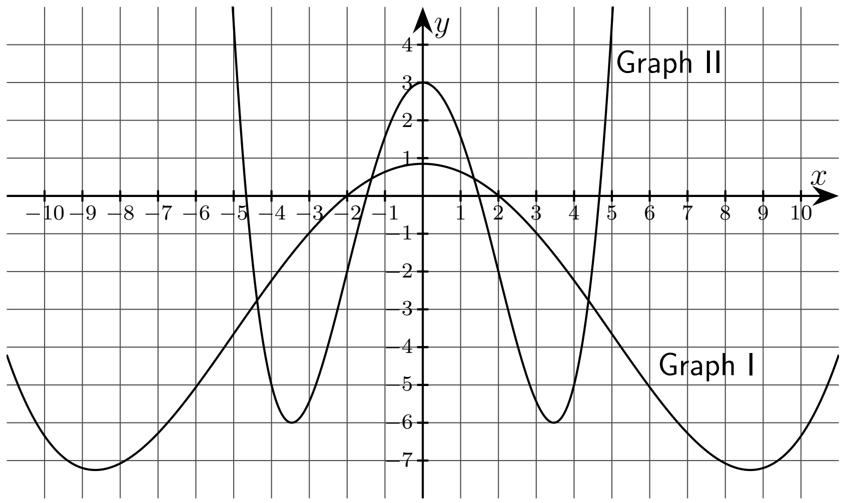
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}\,x^3 - 3\,x$.

2.1 Es gilt $f''(2) \neq 0$.
Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist.

(2 BE)

2.2 Einer der abgebildeten Graphen I und II ist der Graph einer Stammfunktion von f.
Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe.

(3 BE)



	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$f'(x) = \frac{3}{4}\,x^2 - 3$; $f'(2) = 0$ 2 BE
2.2	Graph II, denn: Der Graph jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt. 3 BE

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

In der Ebene $E: x_2 + 2\,x_3 = 6$ liegt der Punkt $A(10\,|\,y\,|\,0{,}5)$.

3.1 Berechnen Sie den Wert von y.

(1 BE)

3.2 Betrachtet wird die Lotgerade vom Punkt $P(8\,|\,12\,|\,2)$ auf die Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten des zugehörigen Lotfußpunktes F.

(4 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	$y + 2 \cdot 0{,}5 = 6 \;\Leftrightarrow\; y = 5$ 1 BE
3.2	Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt $(12 + r) + 2 \cdot (2 + 2\,r) = 6 \;\Leftrightarrow\; 5\,r = -10 \;\Leftrightarrow\; r = -2.$ Somit gilt $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$. 4 BE

HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

Für ein Zufallsexperiment mit den beiden Ereignissen A und B sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	0,32		0,4
$\overline{A}$		0,12	
$\sum$	0,8		1

4.1 Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel.

(2 BE)

4.2 Prüfen Sie, ob $P_A(B) = P(B)$ gilt.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)
4.1	see table below; 2 BE
4.2	$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,32}{0,4} = 0,8 = P(B)$ 3 BE

4.1:

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	0,32	0,08	0,4
$\overline{A}$	0,48	0,12	0,6
$\sum$	0,8	0,2	1

2 BE

4.2: $$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,32}{0,4} = 0,8 = P(B)$$

3 BE

HMF 5 - Analysis (Pool 2)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 5\,x$.

5.1 Geben Sie einen Funktionsterm einer Stammfunktion von g an.

(2 BE)

5.2 Es gibt genau eine reelle Zahl a, so dass der Graph der Funktion g an der Stelle $x = a \cdot \ln(10)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

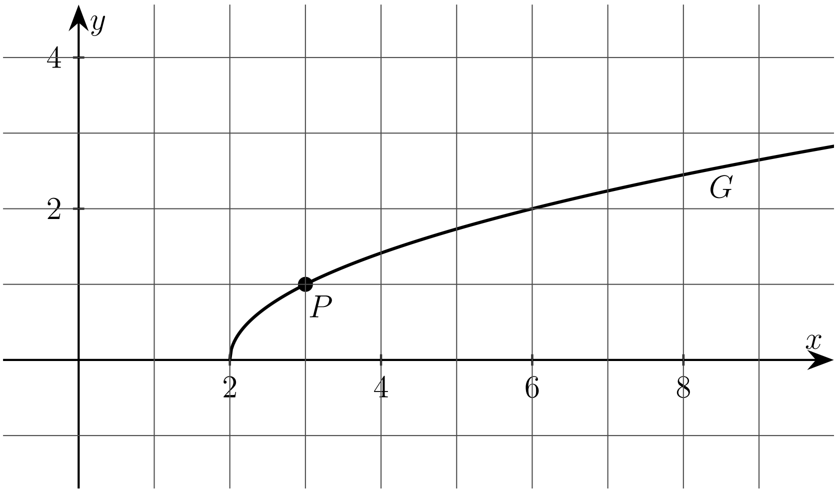
Bestimmen Sie a.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analysis (Pool 2)
5.1	$2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}\,x^2$ 2 BE
5.2	$g'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 5$ $0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,x = \ln(10) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln(10)$ Also gilt $a = 2$. 3 BE

HMF 6 - Analysis (Pool 2)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-2}$ und $x \in [2\,;+\infty[$.
Die Abbildung zeigt den Graphen G von f sowie den Punkt $P(3\,|\,1)$.
Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ist die Tangente an G im Punkt P und hat mit G nur den Punkt P gemeinsam.

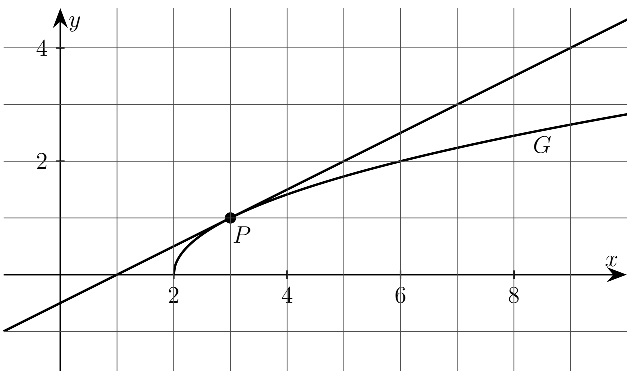


6.1 Zeichnen Sie die Tangente in die Abbildung ein.

(1 BE)

6.2 Betrachtet werden alle Geraden, die mit G sowohl den Punkt P als auch einen weiteren Punkt gemeinsam haben.
Geben Sie die Steigungen dieser Geraden an.

(4 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 2)
6.1	 1 BE
6.2	Es sind genau die Steigungen m, für die $\frac{1}{2} < m \leq 1$ oder $0 < m < \frac{1}{2}$ gilt. 4 BE

HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben ist die Schar der Ebenen $E_a : 3\,x_1 + a\,x_2 + 6\,x_3 = 12$ mit $a > 0$.

7.1 Zeigen Sie, dass jede Ebene E_a die x_1-Achse an der Stelle $x_1 = 4$ und die x_3-Achse an der Stelle $x_3 = 2$ schneidet.

(2 BE)

7.2 Der Ursprung des Koordinatensystems und die Schnittpunkte der Ebene E_a mit den Koordinatenachsen bilden die Eckpunkte einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. Bestimmen Sie den Wert für a, so dass das Volumen der Pyramide 16 beträgt.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)
7.1	Mit $x_2 = x_3 = 0$ ergibt sich $3 \cdot x_1 = 12 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 4$. Mit $x_1 = x_2 = 0$ ergibt sich $6 \cdot x_3 = 12 \;\Leftrightarrow\; x_3 = 2$. 2 BE
7.2	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{12}{a} = 16 \;\Leftrightarrow\; a = 1$ 3 BE

HMF 8 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Für jede reelle Zahl k wird die Gerade $g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5-6\,k \\ 3\,k \\ 4-9\,k \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ betrachtet.

8.1 Zeigen Sie, dass für keinen Wert von k der Punkt $(0\,|\,0\,|\,0)$ auf g_k liegt.

(2 BE)

8.2 Beurteilen Sie die folgende Aussage: *„Alle Geraden g_k sind identisch.“*

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analytische Geometrie (Pool 2)
8.1	Aus $0 = 3\,k - r$ folgt $r = 3\,k$. Eingesetzt in $0 = 5 - 6\,k + 2\,r$ führt das zur falschen Aussage $0 = 5$. 2 BE
8.2	Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor für alle Geraden g_k. Der Punkt $(5\,|\,0\,|\,4)$ auf g_0 ist gemeinsamer Punkt aller Geraden g_k, weil $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6\,k \\ 3\,k \\ 4-9\,k \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Lösung $r = 3\,k$ hat. Folglich ist die zu beurteilende Aussage wahr. 3 BE

HMF 9 - Stochastik (Pool 2)

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p mit $p < 1$.
Es ist bekannt, dass $P(X = 1)$ vierzehnmal so groß ist wie $P(X = 0)$ und dass der Erwartungswert von X gleich 10 ist.

Berechnen Sie die Werte von p und n.

(5 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 9 - Stochastik (Pool 2)
9.	$n \cdot p = 10$ Damit gilt: $P(X=1) = 14 \cdot P(X=0) \Leftrightarrow n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} = 14 \cdot (1-p)^n$ $\Leftrightarrow 10 = 14 \cdot (1-p)$ $\Leftrightarrow p = \frac{2}{7}$ $n \cdot \frac{2}{7} = 10 \Leftrightarrow n = 35$ 5 BE

HMF 10 - Stochastik (Pool 2)

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

10.1 Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an.

Begründen Sie, dass $P(X = 10) = P(X = 15)$ ist.

(2 BE)

10.2 Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist.

Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5."

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 10 - Stochastik (Pool 2)
10.1	Das Produkt 10 bzw. 15 ergibt sich jeweils aus genau zwei Ergebnissen: $(2;5)$ und $(5;2)$ bzw. $(3;5)$ und $(5;3)$. 2 BE
10.2	Das Produkt ist genau dann gleich 2, 3 oder 5, wenn eine der n erzielten Zahlen 2, 3 oder 5 ist und sonst nur Einsen erzielt werden. Ein Term für die beschriebene Wahrscheinlichkeit ist also $3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. 3 BE

HMF-Bewertungsbogen für: ______________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$f(1)=2$ 1 BE
1.2	$A_1=\int_0^1 2\,x^3\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\,x^4\right]_0^1=\frac{1}{2}$ $A_2=2-A_1=\frac{3}{2}$ 4 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$f'(x)=\frac{3}{4}\,x^2-3$; $f'(2)=0$ 2 BE
2.2	Graph II, denn: Der Graph jeder Stammfunktion von f hat an der Stelle $x=2$ einen Wendepunkt. 3 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	$y+2\cdot 0{,}5=6 \;\Leftrightarrow\; y=5$ 1 BE
3.2	Mit $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\12\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ folgt $(12+r)+2\cdot(2+2\,r)=6 \;\Leftrightarrow\; 5\,r=-10 \;\Leftrightarrow\; r=-2.$ Somit gilt $\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}8\\12\\2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\10\\-2\end{pmatrix}.$ 4 BE

Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

4.1

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	0,32	0,08	0,4
$\overline{A}$	0,48	0,12	0,6
$\sum$	0,8	0,2	1

2 BE

4.2

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}32}{0{,}4} = 0{,}8 = P(B)$$

3 BE

Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analysis (Pool 2)

5.1

$2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}x^2$

2 BE

5.2

$g'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 5$

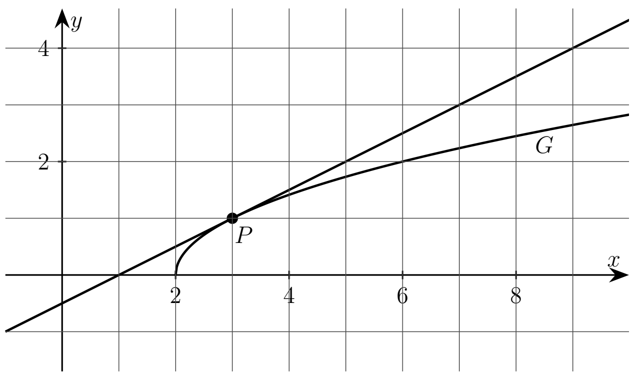
$0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x = \ln(10) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln(10)$

Also gilt $a = 2$.

3 BE

Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 2)

6.1



1 BE

6.2

Es sind genau die Steigungen m, für die $\frac{1}{2} < m \leq 1$ oder $0 < m < \frac{1}{2}$ gilt.

4 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)
7.1	Mit $x_2 = x_3 = 0$ ergibt sich $3 \cdot x_1 = 12 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 4$. Mit $x_1 = x_2 = 0$ ergibt sich $6 \cdot x_3 = 12 \;\Leftrightarrow\; x_3 = 2$. 2 BE
7.2	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{12}{a} = 16 \;\Leftrightarrow\; a = 1$ 3 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analytische Geometrie (Pool 2)
8.1	Aus $0 = 3\,k - r$ folgt $r = 3\,k$. Eingesetzt in $0 = 5 - 6\,k + 2\,r$ führt das zur falschen Aussage $0 = 5$. 2 BE
8.2	Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor für alle Geraden g_k. Der Punkt $(5\,\vert\,0\,\vert\,4)$ auf g_0 ist gemeinsamer Punkt aller Geraden g_k, weil $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6\,k \\ 3\,k \\ 4-9\,k \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Lösung $r = 3\,k$ hat. Folglich ist die zu beurteilende Aussage wahr. 3 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 9 - Stochastik (Pool 2)
9.	$n \cdot p = 10$ Damit gilt: $P(X=1) = 14 \cdot P(X=0) \;\Leftrightarrow\; n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} = 14 \cdot (1-p)^n$ $\Leftrightarrow\; 10 = 14 \cdot (1-p)$ $\Leftrightarrow\; p = \frac{2}{7}$ $n \cdot \frac{2}{7} = 10 \;\Leftrightarrow\; n = 35$ 5 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 10 - Stochastik (Pool 2)
10.1	Das Produkt 10 bzw. 15 ergibt sich jeweils aus genau zwei Ergebnissen: $(2;5)$ und $(5;2)$ bzw. $(3;5)$ und $(5;3)$. 2 BE
10.2	Das Produkt ist genau dann gleich 2, 3 oder 5, wenn eine der n erzielten Zahlen 2, 3 oder 5 ist und sonst nur Einsen erzielt werden. Ein Term für die beschriebene Wahrscheinlichkeit ist also $3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$. 3 BE

Erstkorrektor: Von 30 Bewertungseinheiten wurden erreicht: _________

Zweitkorrektor: Von 30 Bewertungseinheiten wurden erreicht: _________

Aufgabe : Analytische Geometrie-Auswahlbogen

Auswahlbogen für Prüflinge
Analytische Geometrie

Name: ______________________________

(in Druckbuchstaben)

Mir ist bekannt, dass ich die vorgegebenen Aufgaben aus den Sachgebieten Analysis und Stochastik zu bearbeiten habe.

Ergänzend habe ich aus den beiden zur Wahl gestellten Aufgaben aus dem Sachgebiet Analytische Geometrie die folgende Aufgabe gewählt:

☐ Aufgabe 3: Analytische Geometrie

☐ Aufgabe 4: Analytische Geometrie

Hinweis: **Es muss genau ein Kreuz gesetzt werden**, denn es fließt nur die Bearbeitung **einer** der beiden Wahlaufgaben aus dem Sachgebiet Analytische Geometrie in die Bewertung der Abiturprüfung ein, und zwar die Bearbeitung der angekreuzten Aufgabe.

____

Unterschrift des Prüflings

Aufgabe 1: Analysis-CAS

a) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = \frac{1}{2\,k} \cdot x^2 \cdot (x - 2\,k)^2 \qquad \text{und} \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a1) Begründen Sie, dass f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an. (3 BE)

a2) Der Graph G_k hat den Hochpunkt $(k \mid f_k(k))$ und zwei Tiefpunkte, die denselben Abstand von dem Hochpunkt haben.
Berechnen Sie diesen Abstand. (4 BE)

a3) Betrachtet wird die Fläche, die G_k, die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen.
Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert eines Integrals zu berechnen:

Für jeden Wert von k gibt der Term $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_k(x)\,\mathrm{d}x$ den Inhalt der betrachteten Fläche an.

(4 BE)

a4) Für jeden Wert von k schließen G_k und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h_k mit $h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x - 2\,k)^2$ eine Fläche ein, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt.
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Für $k > 3$ ist der Inhalt der Fläche kleiner als k^5. (5 BE)

b) Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet. Für ein bestimmtes Regenereignis wird die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion r mit

$$r(x) = \mathrm{e}^x \cdot f_{2,5}(x) \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le 5$$

modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden, die seit Beginn des Zuflusses in das Auffangbecken vergangen ist, und $r(x)$ die momentane Zuflussrate in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ (Kubikmeter pro Stunde). Die Funktion $f_{2,5}$ ist die Funktion der Schar aus Aufgabenteil a) mit $k = 2{,}5$.

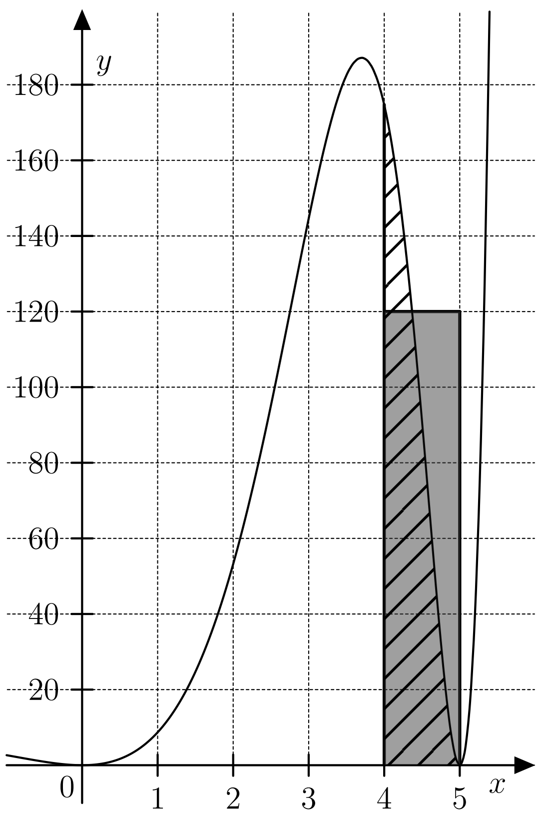
b1) Berechnen Sie die größte und die kleinste momentane Zuflussrate im betrachteten Zeitraum. (4 BE)

b2) Im Intervall $[\,0\,;\,5\,]$ besitzt r genau zwei Wendestellen x_0 und x_1.
Außerdem gilt $r'(x_0) \approx 100{,}5$ und $r'(x_1) \approx -240{,}2$ sowie $r'(0) = 0$ und $r'(5) = 0$.
Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes $r'(x_0)$, die sich aus diesen Informationen ergibt, im Sachzusammenhang. (3 BE)

b3) Die Abbildung zeigt den Graphen von r mit einigen Eintragungen.
Erläutern Sie, dass mit diesen Eintragungen die folgende Aussage begründet werden kann:

$$\int_4^5 r(x)\,\mathrm{d}x < 120$$

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang. (4 BE)



b4) Zu Beginn des Zuflusses ist das Auffangbecken bereits mit $186\,\mathrm{m}^3$ Regenwasser gefüllt. Nach dreieinhalb Stunden wird eine Pumpe eingeschaltet. Diese pumpt bis zum Ende des betrachteten Zeitraums Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate ab. Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch r beschrieben.
Geben Sie einen Term an, der das Wasservolumen im Auffangbecken zu einem beliebigen Zeitpunkt nach dem Einschalten der Pumpe in Kubikmetern beschreibt. (3 BE)

Aufgabe 1: Analysis-CAS

a) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = \frac{1}{2\,k} \cdot x^2 \cdot (x - 2\,k)^2 \qquad \text{und} \qquad k \in \mathbb{R}^+.$$

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a1) Begründen Sie, dass f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an. (3 BE)

a2) Der Graph G_k hat den Hochpunkt $(k \mid f_k(k))$ und zwei Tiefpunkte, die denselben Abstand von dem Hochpunkt haben.
Berechnen Sie diesen Abstand. (4 BE)

a3) Betrachtet wird die Fläche, die G_k, die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen.
Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert eines Integrals zu berechnen:

Für jeden Wert von k gibt der Term $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_k(x)\,\mathrm{d}x$ den Inhalt der betrachteten Fläche an.

(4 BE)

a4) Für jeden Wert von k schließen G_k und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h_k mit $h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x - 2\,k)^2$ eine Fläche ein, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt.
Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Für $k > 3$ ist der Inhalt der Fläche kleiner als k^5. (5 BE)

b) Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet. Für ein bestimmtes Regenereignis wird die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion r mit

$$r(x) = \mathrm{e}^x \cdot f_{2,5}(x) \qquad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 5$$

modellhaft beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden, die seit Beginn des Zuflusses in das Auffangbecken vergangen ist, und $r(x)$ die momentane Zuflussrate in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ (Kubikmeter pro Stunde). Die Funktion $f_{2,5}$ ist die Funktion der Schar aus Aufgabenteil a) mit $k = 2{,}5$.

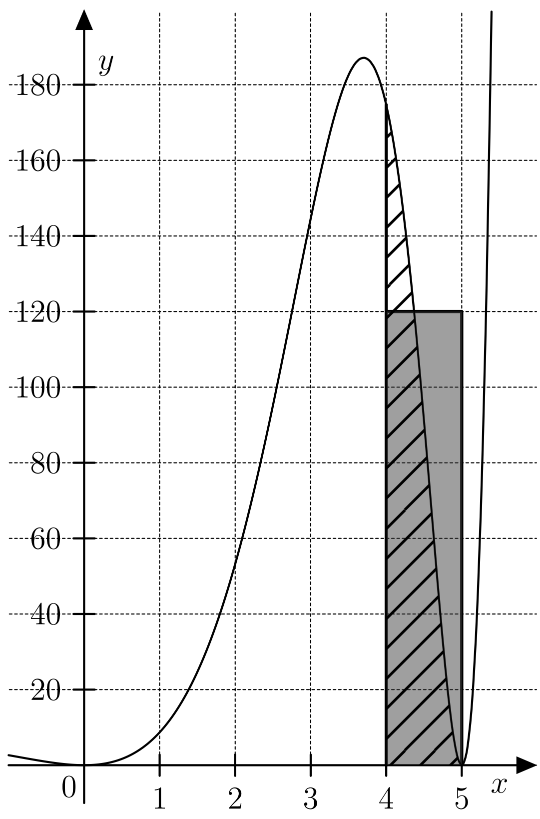
b1) Berechnen Sie die größte und die kleinste momentane Zuflussrate im betrachteten Zeitraum. (4 BE)

b2) Im Intervall $[\,0\,;\,5\,]$ besitzt r genau zwei Wendestellen x_0 und x_1.
Außerdem gilt $r'(x_0) \approx 100{,}5$ und $r'(x_1) \approx -240{,}2$ sowie $r'(0) = 0$ und $r'(5) = 0$.
Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes $r'(x_0)$, die sich aus diesen Informationen ergibt, im Sachzusammenhang. (3 BE)

b3) Die Abbildung zeigt den Graphen von r mit einigen Eintragungen.
Erläutern Sie, dass mit diesen Eintragungen die folgende Aussage begründet werden kann:

$$\int_4^5 r(x)\,\mathrm{d}x < 120$$

Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang. (4 BE)



b4) Zu Beginn des Zuflusses ist das Auffangbecken bereits mit $186\,\mathrm{m}^3$ Regenwasser gefüllt. Nach dreieinhalb Stunden wird eine Pumpe eingeschaltet. Diese pumpt bis zum Ende des betrachteten Zeitraums Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate ab. Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch r beschrieben.
Geben Sie einen Term an, der das Wasservolumen im Auffangbecken zu einem beliebigen Zeitpunkt nach dem Einschalten der Pumpe in Kubikmetern beschreibt. (3 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
a1) $0; 2\,k$ Wegen $k > 0$ gibt es genau zwei Nullstellen.	2 1		
a2) $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = k \vee x = 2\,k$ $\sqrt{(k-0)^2 + (f_k(k) - f_k(0))^2} = \frac{k \cdot \sqrt{k^4+4}}{2}$		2 2	
a3) Der Funktionsterm ist als Produkt von drei Faktoren gegeben, die alle nur nicht-negative Werte annehmen: Es gilt $\frac{1}{2\,k} > 0$, weil $k > 0$ ist; x^2 und $(x-2\,k)^2$ sind quadratische Terme. Folglich gibt es kein Flächenstück unterhalb der x-Achse, womit die Aussage wahr ist.		4	
a4) $f_k(x) = h_k(x) \Leftrightarrow x = -k \vee x = k \vee x = 2\,k$ Flächeninhalt: $\int_{-k}^{k} (h_k(x) - f_k(x))\,\mathrm{d}x + \int_{k}^{2k} (f_k(x) - h_k(x))\,\mathrm{d}x = \frac{29}{10}\,k^4$ Wegen $\frac{29}{10}\,k^4 < k^5 \Leftrightarrow \frac{29}{10} < k$ ist die für $k > 3$ getroffene Aussage richtig.			1 3 1
b1) $r'(x) = 0$ liefert die Lösungen $x = 0$, $x = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$ und $x = 5$. Außerdem gilt $r(0) = 0$, $r\left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right) \approx 187$ und $r(5) = 0$. Die kleinste momentane Zuflussrate beträgt somit $0\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$, die größte etwa $187\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$.	2 2		
b2) Die momentane Zuflussrate steigt im betrachteten Zeitraum mit etwa $100{,}5\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ pro Stunde am stärksten zu dem Zeitpunkt an, der durch x_0 beschrieben wird.		3	
b3) In der Abbildung hat das Rechteck mit 120 einen größeren Inhalt als die schraffierte Fläche, weil die nicht schraffierte graue Fläche einen größeren Inhalt hat als der Teil der schraffierten Fläche, der nicht zum Rechteck gehört. In der letzten Stunde des betrachteten Zeitraums sind weniger als $120\,\mathrm{m}^3$ Regenwasser in das Auffangbecken geflossen.		2 2	
b4) $186 + \int_0^x r(t)\,\mathrm{d}t - c \cdot (x - 3{,}5)$, wobei c die konstante Entnahmerate der Pumpe in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ beschreibt.			3
Summe der Bewertungseinheiten	7	15	8

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Die Abbildung 1 zeigt eine Holzfigur. Diese wird auf der Seite liegend als Rotationskörper modelliert, der durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse in einem Koordinatensystem entsteht (siehe Abbildung 2).

Dabei gilt $\quad f(x) = -0{,}01\,x^4 + 0{,}14\,x^3 - 0{,}67\,x^2 + 1{,}2\,x + 3{,}02 \quad$ mit $\quad 0 \le x \le 8.$

Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.

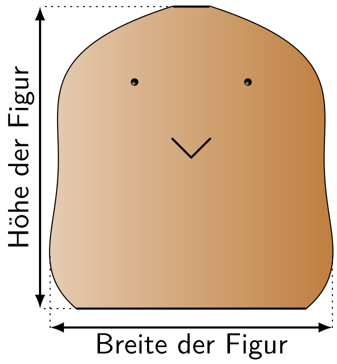


Abbildung 1

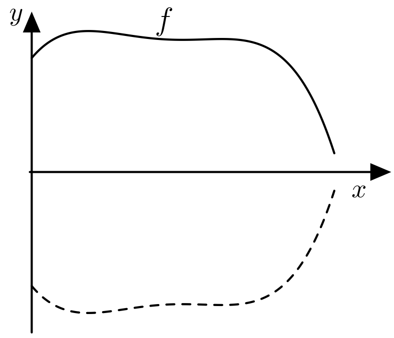


Abbildung 2

a) Die Holzfigur steht aufrecht auf einer ebenen Tischplatte.

a1) Geben Sie die Höhe der Figur an. (1 BE)

a2) Berechnen Sie den Umfang und den Inhalt der kreisförmigen Grundfläche der Figur. (4 BE)

a3) Bestimmen Sie rechnerisch die Breite der Figur. (4 BE)

a4) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels des Graphen von f und der y-Achse. (3 BE)

a5) Aus der Holzfigur sollen durch Schnitte parallel zur Tischplatte Scheiben herausgeschnitten werden, so dass jede dieser herausgeschnittenen Scheiben die folgenden Anforderungen erfüllt:

- Die Scheibe ist $1\,\mathrm{cm}$ hoch.
- Die Grundfläche der Scheibe hat denselben Durchmesser wie ihre Deckfläche.

Ermitteln Sie, wie viele solcher Scheiben höchstens aus dieser einen Holzfigur herausgeschnitten werden können. (4 BE)

b) Nun wird der obere Teil der Holzfigur neu modelliert. Diese Modellierung erfolgt für $5 \le x \le 8$ durch Rotation des Graphen einer Funktion g um die x-Achse. Für $0 \le x < 5$ wird die Holzfigur weiterhin mithilfe von f modelliert.

b1) Für geeignet gewählte reelle Zahlen a und b ist $g(x) = a \cdot (x+1) \cdot \sqrt{b-x}$.
Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph von f an der Stelle $x = 5$ sprung- und knickfrei in den Graphen von g übergeht. (4 BE)

Verwenden Sie für die weiteren Berechnungen nun $g(x) = \dfrac{44 \cdot \sqrt{3}}{225} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{8-x}$.

b2) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g für $5 \le x \le 8$ in die Abbildung 3. (2 BE)

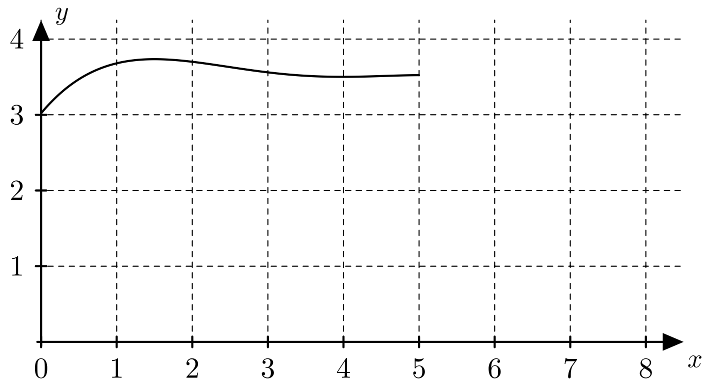


Abbildung 3

b3) Berechnen Sie das Volumen der Holzfigur entsprechend der neuen Modellierung durch die Funktionen f und g. (4 BE)

c) Für den Inhalt A_M der Mantelfläche eines Kegelstumpfes gilt $A_M = (r_1 + r_2) \cdot \pi \cdot s$, wobei r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreisflächen darstellen und s die Länge einer Mantellinie des Kegelstumpfes angibt (siehe Abbildung 4).

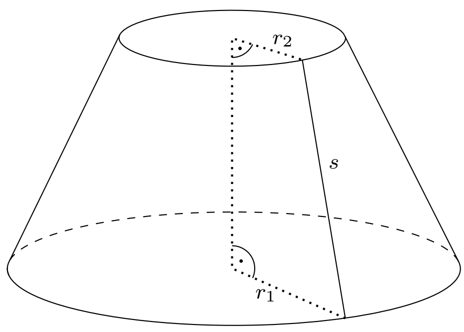


Abbildung 4

Der Term

$$\sum_{i=0}^{7} \left((f(i) + f(i+1)) \cdot \pi \cdot \sqrt{1^2 + (f(i+1) - f(i))^2} \right)$$

wird verwendet, um einen Näherungswert für den Inhalt der Mantelfläche des durch f über dem Intervall $[\,0\,;\,8\,]$ erzeugten Rotationskörpers zu berechnen.

Erläutern Sie die geometrischen Überlegungen, die diesem Term zugrunde liegen. (4 BE)

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Die Abbildung 1 zeigt eine Holzfigur. Diese wird auf der Seite liegend als Rotationskörper modelliert, der durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse in einem Koordinatensystem entsteht (siehe Abbildung 2).

Dabei gilt $\quad f(x) = -0{,}01\,x^4 + 0{,}14\,x^3 - 0{,}67\,x^2 + 1{,}2\,x + 3{,}02 \quad$ mit $\quad 0 \leq x \leq 8.$

Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.

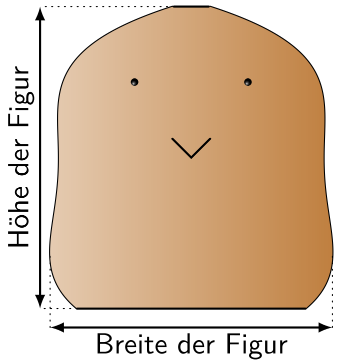


Abbildung 1

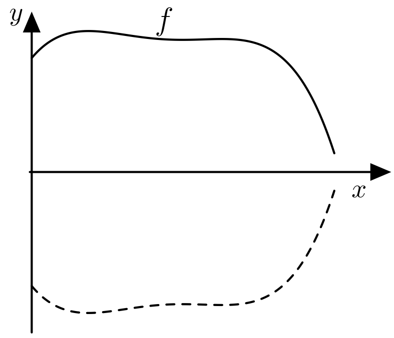


Abbildung 2

a) Die Holzfigur steht aufrecht auf einer ebenen Tischplatte.

a1) Geben Sie die Höhe der Figur an. (1 BE)

a2) Berechnen Sie den Umfang und den Inhalt der kreisförmigen Grundfläche der Figur. (4 BE)

a3) Bestimmen Sie rechnerisch die Breite der Figur. (4 BE)

a4) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels des Graphen von f und der y-Achse. (3 BE)

a5) Aus der Holzfigur sollen durch Schnitte parallel zur Tischplatte Scheiben herausgeschnitten werden, so dass jede dieser herausgeschnittenen Scheiben die folgenden Anforderungen erfüllt:

- Die Scheibe ist $1\,\mathrm{cm}$ hoch.
- Die Grundfläche der Scheibe hat denselben Durchmesser wie ihre Deckfläche.

Ermitteln Sie, wie viele solcher Scheiben höchstens aus dieser einen Holzfigur herausgeschnitten werden können. (4 BE)

b) Nun wird der obere Teil der Holzfigur neu modelliert. Diese Modellierung erfolgt für $5 \leq x \leq 8$ durch Rotation des Graphen einer Funktion g um die x-Achse. Für $0 \leq x < 5$ wird die Holzfigur weiterhin mithilfe von f modelliert.

b1) Für geeignet gewählte reelle Zahlen a und b ist $g(x) = a \cdot (x+1) \cdot \sqrt{b-x}$. Bestimmen Sie a und b so, dass der Graph von f an der Stelle $x = 5$ sprung- und knickfrei in den Graphen von g übergeht. (4 BE)

Verwenden Sie für die weiteren Berechnungen nun $g(x) = \dfrac{44 \cdot \sqrt{3}}{225} \cdot (x+1) \cdot \sqrt{8-x}$.

b2) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g für $5 \leq x \leq 8$ in die Abbildung 3. (2 BE)

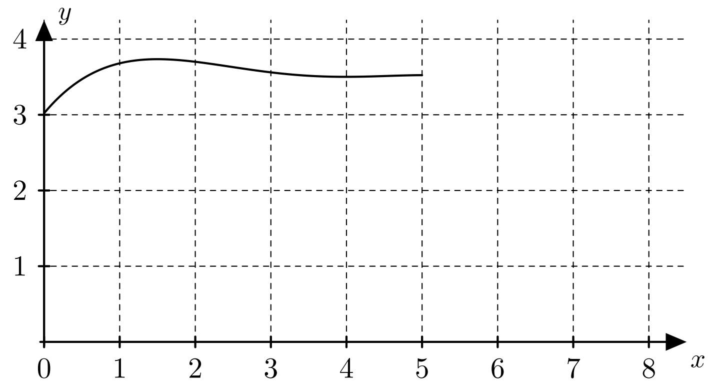


Abbildung 3

b3) Berechnen Sie das Volumen der Holzfigur entsprechend der neuen Modellierung durch die Funktionen f und g. (4 BE)

c) Für den Inhalt A_M der Mantelfläche eines Kegelstumpfes gilt $A_M = (r_1 + r_2) \cdot \pi \cdot s$, wobei r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreisflächen darstellen und s die Länge einer Mantellinie des Kegelstumpfes angibt (siehe Abbildung 4).

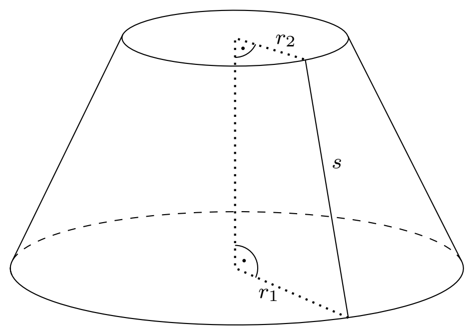


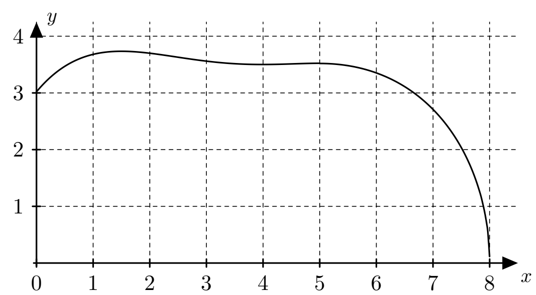
Abbildung 4

Der Term

$$\sum_{i=0}^{7} \left((f(i) + f(i+1)) \cdot \pi \cdot \sqrt{1^2 + (f(i+1) - f(i))^2} \right)$$

wird verwendet, um einen Näherungswert für den Inhalt der Mantelfläche des durch f über dem Intervall $[\,0\,;\,8\,]$ erzeugten Rotationskörpers zu berechnen.

Erläutern Sie die geometrischen Überlegungen, die diesem Term zugrunde liegen. (4 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
a1) $8\,\text{cm}$	1		
a2) Der Radius der Grundfläche entspricht $f(0)$. $2 \cdot \pi \cdot f(0) \approx 19{,}0$ $\pi \cdot (f(0))^2 \approx 28{,}7$ Der Umfang beträgt ca. $19{,}0\,\text{cm}$ und der Flächeninhalt ca. $28{,}7\,\text{cm}^2$.	4		
a3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5 \vee x = 4 \vee x = 5$ Gemäß Abbildung 2 liegt an der Stelle $x = 1{,}5$ das globale Maximum von f im Intervall $[0; 8]$. Mit $2 \cdot f(1{,}5) \approx 7{,}5$ beträgt die Breite ca. $7{,}5\,\text{cm}$.		2 2	
a4) Für die Größe des Schnittwinkels α des Graphen von f und der y-Achse gilt $\alpha = 90° - \arctan(f'(0)) \approx 39{,}8°$.		3	
a5) $f(x) = f(x+1)$ liefert die Lösungen $x \approx 1{,}06$, $x \approx 3{,}56$ und $x \approx 4{,}38$. Wegen $3{,}56 + 1 > 4{,}38$ können höchstens zwei solcher Scheiben aus der einen Figur herausgeschnitten werden.			3 1
b1) Die Bedingungen $f(5) = g(5)$ und $f'(5) = g'(5)$ liefern $a = \frac{44 \cdot \sqrt{3}}{225}$ und $b = 8$.		4	
b2) 	2		
b3) Mit $\pi \cdot \int_0^5 (f(x))^2\,dx + \pi \cdot \int_5^8 (g(x))^2\,dx \approx 279{,}8$ beträgt das Volumen der Holzfigur ca. $279{,}8\,\text{cm}^3$.		4	
c) Der Rotationskörper wird in 8 Scheiben unterteilt, die näherungsweise als Kegelstümpfe jeweils mit der Höhe 1 betrachtet werden. Für jeden Kegelstumpf K_i gilt: ▪ Die Radien der Kreisflächen sind $f(i)$ und $f(i+1)$. ▪ Gemäß dem Satz des Pythagoras ist die Länge der Mantellinie $s = \sqrt{1^2 + (f(i+1) - f(i))^2}$. Es werden die Mantelflächeninhalte aller acht Kegelstümpfe addiert.			4
Summe der Bewertungseinheiten	7	15	8

Aufgabe 3: Analytische Geometrie-CAS

Über einer Bühne wird ein Segeltuch angebracht. In einem Koordinatensystem wird das Segeltuch durch das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(0\,|\,0\,|\,8)$, $B(6\,|\,4\,|\,7)$ und $C(-1\,|\,6\,|\,4)$ modelliert. Die x_1x_2-Ebene stellt die Lage der Bühne dar.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

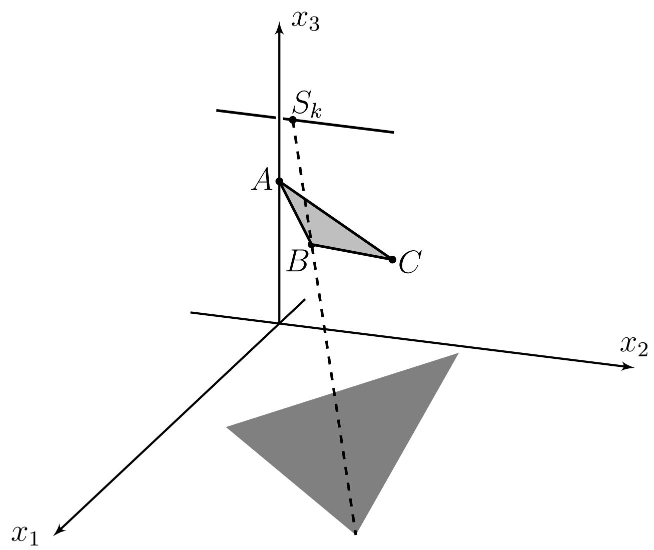
a) a1) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist. (4 BE)

a2) Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (3 BE)

[zur Kontrolle: $-2\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_3 = 64$]

a3) Der Neigungswinkel des Segeltuchs entspricht dem Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene.
Berechnen Sie die Größe dieses Schnittwinkels. (3 BE)

b) Ein Scheinwerfer kann auf einer Schiene hin- und herbewegt werden. Der Scheinwerfer wird als punktförmig angenommen. Seine möglichen Positionen werden durch die Menge der Punkte $S_k(-4\,|\,k\,|\,10)$ mit $k \in [\,-5\,;\,5\,]$ beschrieben.
Im Scheinwerferlicht erzeugt das Segeltuch einen Schatten auf der Bühne.



b1) Ermitteln Sie alle möglichen Abstände, die zwischen der Position des Scheinwerfers und der durch A beschriebenen Ecke des Segeltuchs vorliegen können. (4 BE)

b2) Die durch B beschriebene Ecke des Segeltuchs erzeugt einen Schattenpunkt auf der Bühne.
Untersuchen Sie, ob es eine Position des Scheinwerfers gibt, so dass dieser Schattenpunkt durch einen Punkt auf einer der Koordinatenachsen in der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. (6 BE)

Aufgabe 3: Analytische Geometrie-CAS

Über einer Bühne wird ein Segeltuch angebracht. In einem Koordinatensystem wird das Segeltuch durch das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(0\,|\,0\,|\,8)$, $B(6\,|\,4\,|\,7)$ und $C(-1\,|\,6\,|\,4)$ modelliert. Die x_1x_2-Ebene stellt die Lage der Bühne dar.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

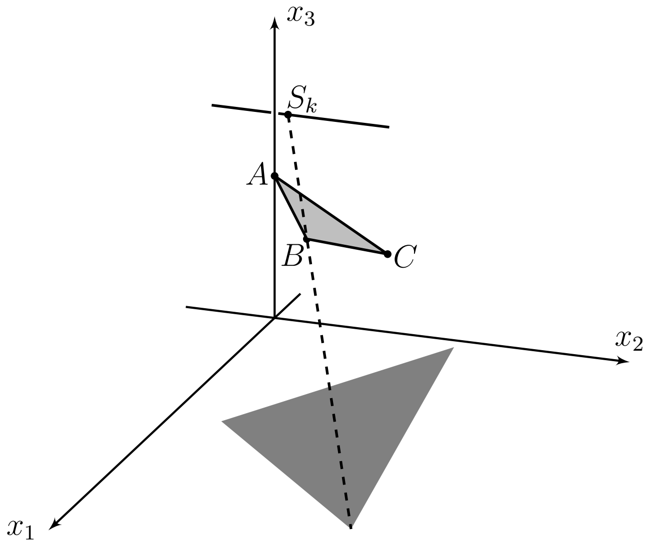
a) a1) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist. (4 BE)

a2) Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (3 BE)

[zur Kontrolle: $-2\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_3 = 64$]

a3) Der Neigungswinkel des Segeltuchs entspricht dem Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene.
Berechnen Sie die Größe dieses Schnittwinkels. (3 BE)

b) Ein Scheinwerfer kann auf einer Schiene hin- und herbewegt werden. Der Scheinwerfer wird als punktförmig angenommen. Seine möglichen Positionen werden durch die Menge der Punkte $S_k(-4\,|\,k\,|\,10)$ mit $k \in [\,-5\,;\,5\,]$ beschrieben.
Im Scheinwerferlicht erzeugt das Segeltuch einen Schatten auf der Bühne.



b1) Ermitteln Sie alle möglichen Abstände, die zwischen der Position des Scheinwerfers und der durch A beschriebenen Ecke des Segeltuchs vorliegen können. (4 BE)

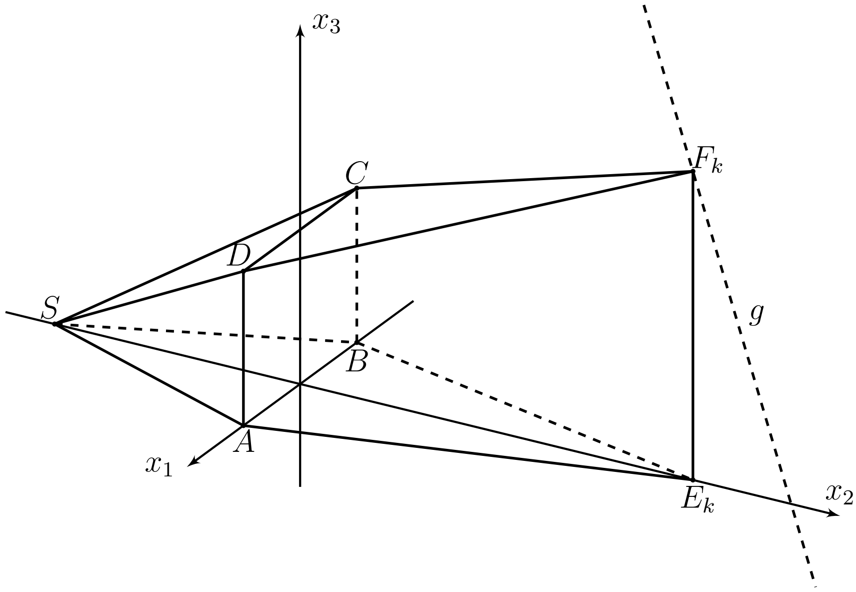
b2) Die durch B beschriebene Ecke des Segeltuchs erzeugt einen Schattenpunkt auf der Bühne.
Untersuchen Sie, ob es eine Position des Scheinwerfers gibt, so dass dieser Schattenpunkt durch einen Punkt auf einer der Koordinatenachsen in der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. (6 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ Wegen $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{53} \neq \sqrt{62} = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ sind genau zwei Seiten des Dreiecks ABC gleich lang.	4		
a2) Mit $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E.		2	
Wegen $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 64$ ist $-2\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_3 = 64$ eine Gleichung von E.		1	
a3) Für den Schnittwinkel φ zwischen E und der x_1x_2-Ebene gilt $\cos(\varphi) = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{8}{\sqrt{93}}$ und daher $\varphi \approx 33{,}9°$.		3	
b1) $d_k = \lvert\overrightarrow{AS_k}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{20 + k^2}$		2	
$d_0 = \sqrt{20 + 0^2} \approx 4{,}47$; $d_{-5} = d_5 = \sqrt{20 + 5^2} \approx 6{,}71$ Es sind alle Abstände zwischen ca. $4{,}47\,\mathrm{m}$ und $6{,}71\,\mathrm{m}$ möglich.		2	
b2) $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BS_k} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ k-4 \\ 3 \end{pmatrix}$ Aus $x_3 = 0$ folgt $t = -\frac{7}{3}$.			3
Wegen $x_1 = 6 - \frac{7}{3} \cdot (-10) \neq 0$ beschreibt der Ortsvektor $\vec{x}$ keinen Punkt auf der x_2-Achse.			1
Wegen $x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 4 - \frac{7}{3}\,k + \frac{28}{3} \;\Leftrightarrow\; k = \frac{40}{7} \approx 5{,}71$ beschreibt der Ortsvektor $\vec{x}$ für $k \in [-5\,;\,5]$ auch keinen Punkt auf der x_1-Achse.			2
Summe der Bewertungseinheiten	4	10	6

Aufgabe 4: Analytische Geometrie-CAS

Betrachtet werden die Punkte $A(2\,|\,0\,|\,0)$, $B(-2\,|\,0\,|\,0)$, $C(-2\,|\,0\,|\,3)$, $D(2\,|\,0\,|\,3)$, $S(0\,|\,-5\,|\,0)$, $E_k(0\,|\,k\,|\,0)$ und $F_k(0\,|\,k\,|\,30-3\,k)$ mit $0<k\leq 10$.

Die Abbildung zeigt einen zusammengesetzten Körper, der aus der Pyramide $ABCDS$ und einem Körper $ABCDE_kF_k$ besteht.



a) Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck.
Untersuchen Sie, ob $ABCD$ auch ein Quadrat ist.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$. (4 BE)

b) b1) Jeder Punkt F_k liegt auf der Gerade g (vgl. Abbildung).

Geben Sie den Ortsvektor eines Punkts auf g an und zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von g ist.
(2 BE)

b2) Begründen Sie, dass die x_1x_3-Ebene für keinen Wert von k eine Symmetrieebene des zusammengesetzten Körpers ist. (3 BE)

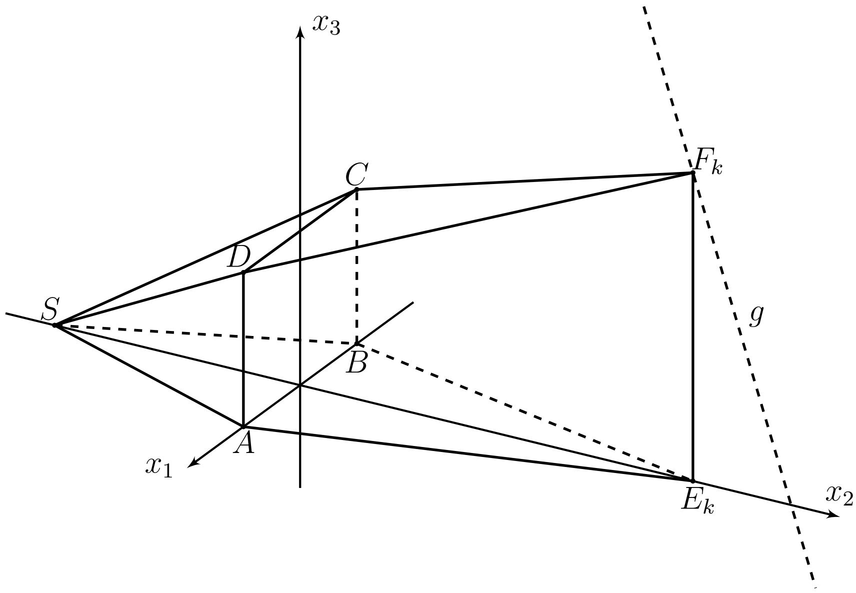
b3) Die Punkte C, D und S liegen in der Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.
Ermitteln Sie den Wert von k, für den der Eckpunkt F_k ebenfalls in L liegt. (5 BE)

b4) Im Dreieck DF_kC wird der Innenwinkel im Punkt F_k betrachtet.
Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die Größe dieses Winkels maximal ist, und erläutern Sie Ihren Lösungsweg. (6 BE)

Aufgabe 4: Analytische Geometrie-CAS

Betrachtet werden die Punkte $A(2\,|\,0\,|\,0)$, $B(-2\,|\,0\,|\,0)$, $C(-2\,|\,0\,|\,3)$, $D(2\,|\,0\,|\,3)$, $S(0\,|\,-5\,|\,0)$, $E_k(0\,|\,k\,|\,0)$ und $F_k(0\,|\,k\,|\,30-3\,k)$ mit $0 < k \leq 10$.

Die Abbildung zeigt einen zusammengesetzten Körper, der aus der Pyramide $ABCDS$ und einem Körper $ABCDE_kF_k$ besteht.



a) Das Viereck $ABCD$ ist ein Rechteck.
Untersuchen Sie, ob $ABCD$ auch ein Quadrat ist.
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $ABCDS$. (4 BE)

b) b1) Jeder Punkt F_k liegt auf der Gerade g (vgl. Abbildung).

Geben Sie den Ortsvektor eines Punkts auf g an und zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von g ist.

(2 BE)

b2) Begründen Sie, dass die x_1x_3-Ebene für keinen Wert von k eine Symmetrieebene des zusammengesetzten Körpers ist. (3 BE)

b3) Die Punkte C, D und S liegen in der Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.
Ermitteln Sie den Wert von k, für den der Eckpunkt F_k ebenfalls in L liegt. (5 BE)

b4) Im Dreieck DF_kC wird der Innenwinkel im Punkt F_k betrachtet.
Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die Größe dieses Winkels maximal ist, und erläutern Sie Ihren Lösungsweg. (6 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
a) Wegen $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind nicht alle Seiten gleich lang und somit ist $ABCD$ kein Quadrat. Volumen der Pyramide $ABCDS$: $\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 20$	2 2		
b1) z.B. $\overrightarrow{OF_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 27 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$		2	
b2) Der Körper $ABCDS$ ist eine Pyramide mit der Höhe 5. Der Körper $ABCDE_kF_k$ ist nur für $k = 10$ eine Pyramide. Da diese Pyramide die Höhe 10 besitzt, ist der zusammengesetzte Körper nicht symmetrisch bezüglich der x_1x_3-Ebene.		3	
b3) Mit $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -20 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von L. Wegen $3 \cdot 0 - 5 \cdot 3 = -15$ ist $3\,x_2 - 5\,x_3 = -15$ eine Gleichung der Ebene L. Mit $3 \cdot k - 5 \cdot (30 - 3\,k) = -15$ gilt $k = 7{,}5$.		2 1 2	
b4) Das Dreieck DF_kC ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{CD}$. Mit M wird der Mittelpunkt von $\overline{CD}$ bezeichnet. Der Innenwinkel des Dreiecks im Punkt F_k ist umso größer, je kleiner die Höhe $\left\lvert\overline{MF_k}\right\rvert$ des Dreiecks ist. Diese Höhe wird minimal, wenn der Vektor $\overrightarrow{MF_k}$ senkrecht zum Richtungsvektor der Gerade g steht. Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 27 - 3\,k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ folgt $k = 8{,}1$.			6
Summe der Bewertungseinheiten	4	10	6

Aufgabe 5: Stochastik-CAS

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß $14\,\%$ das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

a) Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

a1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)

a2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens $10\,\%$ größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

b) Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden $80\,\%$ aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden $90\,\%$ auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit $95\,\%$ etwas höher.

b1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)

b2) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte.
Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde. (3 BE)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von $14\,\%$ durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von $8\,\%$ und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens $14\,\%$“. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

b3) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

b4) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als $20\,\%$ ist, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben.
Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

Aufgabe 5: Stochastik-CAS

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß $14\,\%$ das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

a) Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

a1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)

a2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens $10\,\%$ größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

b) Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden $80\,\%$ aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden $90\,\%$ auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit $95\,\%$ etwas höher.

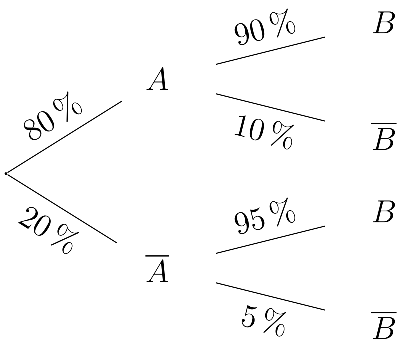
b1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)

b2) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte.
Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde. (3 BE)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von $14\,\%$ durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von $8\,\%$ und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens $14\,\%$“. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

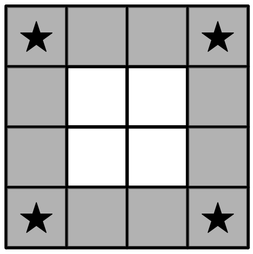
b3) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

b4) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als $20\,\%$ ist, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben.
Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a1) Für die Anzahl X der Radausflügler gilt $P_{0,14}^{300}(X=36)\approx 4\,\%$.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a2) $E(X)=300\cdot 0{,}14=42$
$P_{0,14}^{300}(X\geq 42+4{,}2)=P_{0,14}^{300}(X\geq 47)\approx 22\,\%$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>b1) A: „Die Fahrkarte wird spätestens am Vortag gebucht.“
B: „Die Fahrkarte wird genutzt.“

</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b2) $P_{\overline{B}}(A)=\dfrac{0{,}8\cdot 0{,}1}{P(\overline{B})}=\dfrac{0{,}08}{P(\overline{B})}$
$P_{\overline{B}}(\overline{A})=\dfrac{0{,}2\cdot 0{,}05}{P(\overline{B})}=\dfrac{0{,}01}{P(\overline{B})}$
Die zu beurteilende Aussage ist wahr.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>b3) X beschreibt wieder die Anzahl der Radausflügler.
Zu bestimmen ist die kleinste natürliche Zahl k mit $P_{0,14}^{500}(X\geq k)\leq 8\,\%$.
Aus $P_{0,14}^{500}(X\geq 81)\approx 9{,}0\,\%$ und $P_{0,14}^{500}(X\geq 82)\approx 7{,}1\,\%$ ergibt sich $k=82$.
Befinden sich mindestens 82 Radausflügler in der Stichprobe, so wird die Nullhypothese abgelehnt.</td><td></td><td>4
1</td><td></td></tr>
<tr><td>b4) Zu bestimmen ist die kleinste natürliche Zahl p mit $P_{p\,\%}^{200}(X\leq 35)<20\,\%$.
Aus $P_{0,20}^{200}(X\leq 35)\approx 22\,\%$ und $P_{0,21}^{200}(X\leq 35)\approx 13\,\%$ ergibt sich, dass der tatsächliche Anteil der Radausflügler mindestens $21\,\%$ betragen muss.
Obwohl der Anteil der Radausflügler auf über $14\,\%$ gestiegen ist, wird aufgrund des Testergebnisses entschieden, den Betrieb der Shuttlebusse einzustellen.</td><td></td><td></td><td>3
2</td></tr>
<tr><td>Summe der Bewertungseinheiten</td><td>4</td><td>11</td><td>5</td></tr>
</table>

Aufgabe 6: Stochastik-CAS

Die Abbildung zeigt insgesamt 16 gleich große Felder.
Von den 12 gefärbten Feldern haben 4 einen Stern.



a) Bei einem Zufallsexperiment leuchtet eines der 16 Felder zufällig auf. Die Wahrscheinlichkeit des Aufleuchtens ist für jedes Feld gleich groß. Es werden die folgenden beiden Ereignisse betrachtet.

G: „Das aufleuchtende Feld ist gefärbt."
S: „Das aufleuchtende Feld hat einen Stern."

a1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das aufleuchtende Feld gefärbt und ohne Stern ist. (1 BE)

a2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{G} \cup S)$. (2 BE)

a3) Geben Sie sowohl die Bedeutung des Terms $P_S(G)$ im Sachkontext als auch dessen Wert an. (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein aufleuchtendes Feld gefärbt ist, beträgt $75\,\%$. Das Zufallsexperiment wird 20-mal durchgeführt. Die Zufallsgröße X gibt dabei an, wie oft ein aufleuchtendes Feld gefärbt ist.

a4) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X

- mehr als 15 beträgt,
- kleiner als $90\,\%$ des Erwartungswerts von X ist. (5 BE)

a5) Ermitteln Sie zwei natürliche Zahlen a und b, so dass gilt:
$P_{0{,}75}^{20}(a \leq X \leq b) = 1 - 0{,}25^{20} - 0{,}75^{20}$ (3 BE)

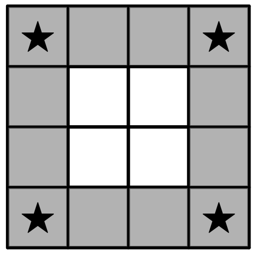
b) Eine Firma programmiert ein Reaktionsspiel, bei dem die obige Abbildung auf einem Touchscreen angezeigt wird. Ein Zufallsgenerator wählt ein Feld aus, dieses leuchtet kurz auf und soll dann möglichst schnell von der spielenden Person berührt werden.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das aufleuchtende Feld einen Stern hat, ist nun p^*.

b1) Bei 100 Durchführungen des Spiels leuchtet 26-mal ein Feld mit Stern auf.
Weisen Sie für diese Situation nach, dass der Wert $0{,}25$ im $95\,\%$-Konfidenzintervall für den Wert von p^* liegt. (3 BE)

b2) Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage für jede natürliche Zahl m mit $m \geq 1$ wahr ist:
Wenn bei $100 \cdot m$ Durchführungen des Spiels $(26 \cdot m)$-mal ein Feld mit Stern aufleuchtet, dann liegt der Wert $0{,}25$ im $95\,\%$-Konfidenzintervall für den Wert von p^*.
(3 BE)

Aufgabe 6: Stochastik-CAS

Die Abbildung zeigt insgesamt 16 gleich große Felder.
Von den 12 gefärbten Feldern haben 4 einen Stern.



a) Bei einem Zufallsexperiment leuchtet eines der 16 Felder zufällig auf. Die Wahrscheinlichkeit des Aufleuchtens ist für jedes Feld gleich groß. Es werden die folgenden beiden Ereignisse betrachtet.

G: „Das aufleuchtende Feld ist gefärbt."
S: „Das aufleuchtende Feld hat einen Stern."

a1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das aufleuchtende Feld gefärbt und ohne Stern ist. (1 BE)

a2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{G} \cup S)$. (2 BE)

a3) Geben Sie sowohl die Bedeutung des Terms $P_S(G)$ im Sachkontext als auch dessen Wert an. (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein aufleuchtendes Feld gefärbt ist, beträgt $75\,\%$. Das Zufallsexperiment wird 20-mal durchgeführt. Die Zufallsgröße X gibt dabei an, wie oft ein aufleuchtendes Feld gefärbt ist.

a4) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X

- mehr als 15 beträgt,
- kleiner als $90\,\%$ des Erwartungswerts von X ist. (5 BE)

a5) Ermitteln Sie zwei natürliche Zahlen a und b, so dass gilt:
$P^{20}_{0{,}75}(a \leq X \leq b) = 1 - 0{,}25^{20} - 0{,}75^{20}$ (3 BE)

b) Eine Firma programmiert ein Reaktionsspiel, bei dem die obige Abbildung auf einem Touchscreen angezeigt wird. Ein Zufallsgenerator wählt ein Feld aus, dieses leuchtet kurz auf und soll dann möglichst schnell von der spielenden Person berührt werden.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das aufleuchtende Feld einen Stern hat, ist nun p^*.

b1) Bei 100 Durchführungen des Spiels leuchtet 26-mal ein Feld mit Stern auf.
Weisen Sie für diese Situation nach, dass der Wert $0{,}25$ im $95\,\%$-Konfidenzintervall für den Wert von p^* liegt. (3 BE)

b2) Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage für jede natürliche Zahl m mit $m \geq 1$ wahr ist:
Wenn bei $100 \cdot m$ Durchführungen des Spiels $(26 \cdot m)$-mal ein Feld mit Stern aufleuchtet, dann liegt der Wert $0{,}25$ im $95\,\%$-Konfidenzintervall für den Wert von p^*.
(3 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
a1) $\frac{8}{16}$	1		
a2) Es gilt $P(\overline{G} \cup S) = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2}$.	2		
a3) Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das aufleuchtende Feld unter der Bedingung, dass es einen Stern hat, gefärbt ist.		2	
Der Wert des Terms ist 1.		1	
a4) $P_{0{,}75}^{20}(X > 15) = P_{0{,}75}^{20}(X \geq 16) \approx 0{,}415$	2		
Mit $E(X) = 20 \cdot 0{,}75 = 15$ ist $P_{0{,}75}^{20}(X < 0{,}9 \cdot E(X)) = P_{0{,}75}^{20}(X < 13{,}5) = P_{0{,}75}^{20}(X \leq 13) \approx 0{,}214$.		3	
a5) Mit $0{,}25^{20} = P_{0{,}75}^{20}(X = 0)$ und $0{,}75^{20} = P_{0{,}75}^{20}(X = 20)$ ist $1 - 0{,}25^{20} - 0{,}75^{20} = P_{0{,}75}^{20}(1 \leq X \leq 19)$ und daher $a = 1$, $b = 19$.			3
b1) Näherungsweise gilt: Die Gleichung $\left\lvert \frac{26}{100} - p \right\rvert = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100}}$ liefert die Grenzen $p \approx 0{,}184$ bzw. $p \approx 0{,}354$ des $95\,\%$-Konfidenzintervalls. Der Wert $0{,}25$ liegt in diesem Intervall.		3	
b2) Die Aussage ist nicht für jede natürliche Zahl m mit $m \geq 1$ wahr. Sie ist z. B. für $m = 100$ falsch: Da die Gleichung $\left\lvert \frac{26\cdot 100}{100\cdot 100} - p \right\rvert = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{100\cdot 100}}$ als untere Grenze des $95\,\%$-Konfidenzintervalls $p \approx 0{,}251$ liefert, liegt der Wert $0{,}25$ nicht in diesem Intervall.			3
Summe der Bewertungseinheiten	5	9	6

Aufgabe 1: Analysis-WTR

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - a\,x + 2\,a$$

und $a \in \mathbb{R}$.
Abbildung 1 zeigt einen Graphen der Schar.

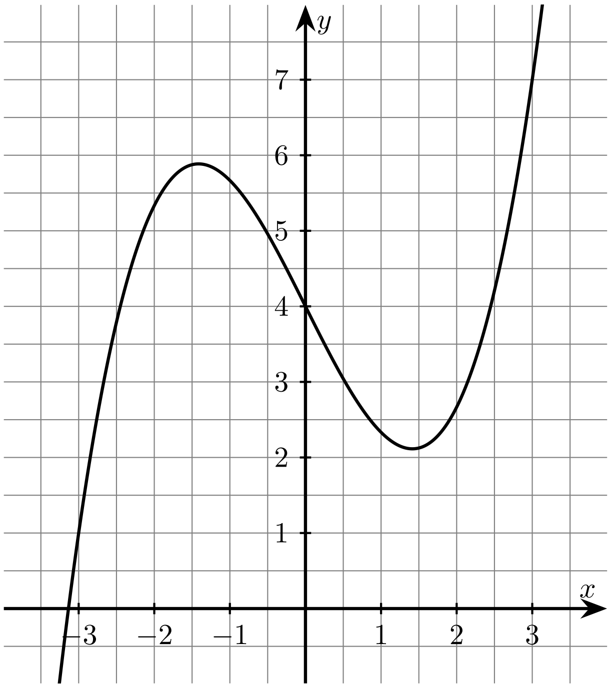


Abbildung 1

a) a1) Der abgebildete Graph verläuft durch den Punkt $(0\,|\,4)$.
Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt. (2 BE)

a2) Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. (5 BE)

a3) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^2 f_a(x)\,dx = 0$ gilt. (4 BE)

b) Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - 2\,x + 4\,.$$

Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abbildung 1 zeigt somit den Graphen G_f von f. Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(0\,|\,4)$.
Die Tangente an G_f im Punkt $P(3\,|\,f(3))$ wird mit t bezeichnet; $y = 7\,x - 14$ ist eine Gleichung von t.

b1)
- Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass

$$f(x) - (7\,x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 \cdot (x+6)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. (6 BE)

b2) Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x)\,dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$.
Für $-1{,}5 \leq k \leq 1{,}5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung.
Untersuchen Sie grafisch mithilfe von Abbildung 1, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \geq 1{,}5$ besitzt. (4 BE)

c) Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen kann, wird als Nennreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet.
Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall $[-12\,;\,36]$ durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in $^\circ\mathrm{C}$ und $r(x)$ der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite. Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion r.

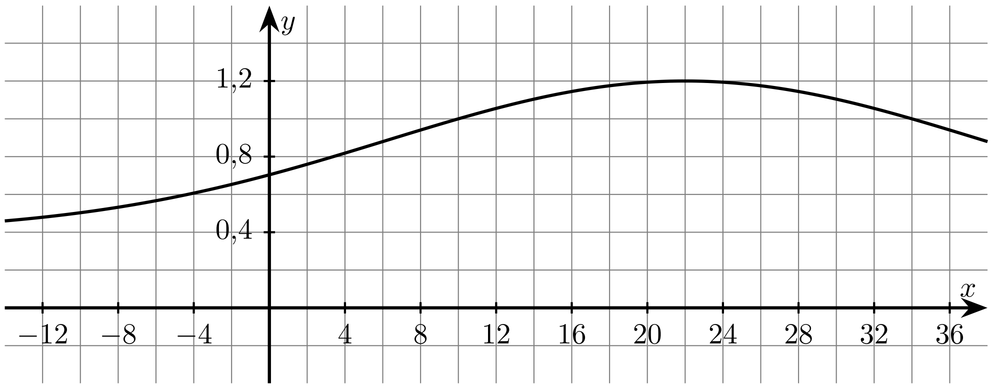


Abbildung 2

Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert $0{,}6$, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur $60\,\%$ seiner Nennreichweite.
Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von $-12\,^\circ\mathrm{C}$ bis $36\,^\circ\mathrm{C}$ sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt.

c1) Geben Sie anhand von Abbildung 2 die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an.
Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang. (4 BE)

c2) Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt $320\,\mathrm{km}$, die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt $500\,\mathrm{km}$.
Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von $0\,^\circ\mathrm{C}$. (5 BE)

Aufgabe 1: Analysis-WTR

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - a\,x + 2\,a$$

und $a \in \mathbb{R}$.
Abbildung 1 zeigt einen Graphen der Schar.

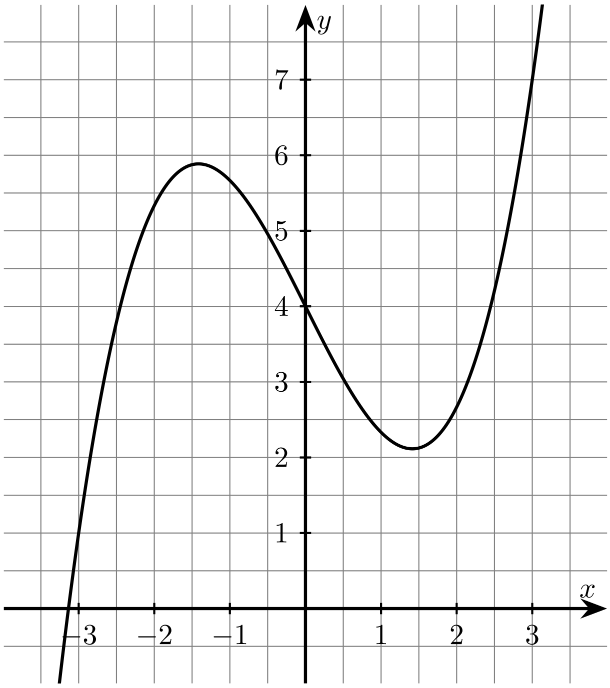


Abbildung 1

a) a1) Der abgebildete Graph verläuft durch den Punkt $(0\,|\,4)$.
Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt. (2 BE)

a2) Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. (5 BE)

a3) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^2 f_a(x)\,dx = 0$ gilt. (4 BE)

b) Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - 2\,x + 4\,.$$

Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abbildung 1 zeigt somit den Graphen G_f von f. Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(0\,|\,4)$.
Die Tangente an G_f im Punkt $P(3\,|\,f(3))$ wird mit t bezeichnet; $y = 7\,x - 14$ ist eine Gleichung von t.

b1)
- Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass

$$f(x) - (7\,x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 \cdot (x+6)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
- Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. (6 BE)

b2) Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x)\,dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$.
Für $-1{,}5 \leq k \leq 1{,}5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung.
Untersuchen Sie grafisch mithilfe von Abbildung 1, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \geq 1{,}5$ besitzt. (4 BE)

c) Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen kann, wird als Nennreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet.
Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall $[-12\,;\,36]$ durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in $^\circ\mathrm{C}$ und $r(x)$ der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite. Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion r.

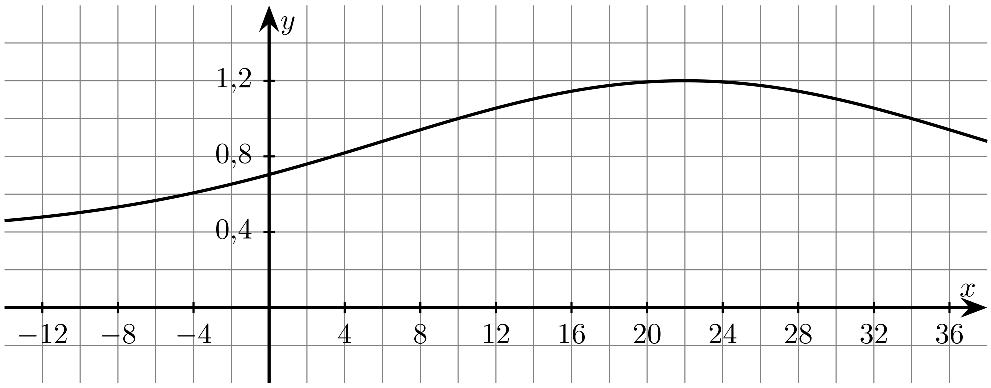


Abbildung 2

Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert $0{,}6$, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur $60\,\%$ seiner Nennreichweite.
Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von $-12\,^\circ\mathrm{C}$ bis $36\,^\circ\mathrm{C}$ sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt.

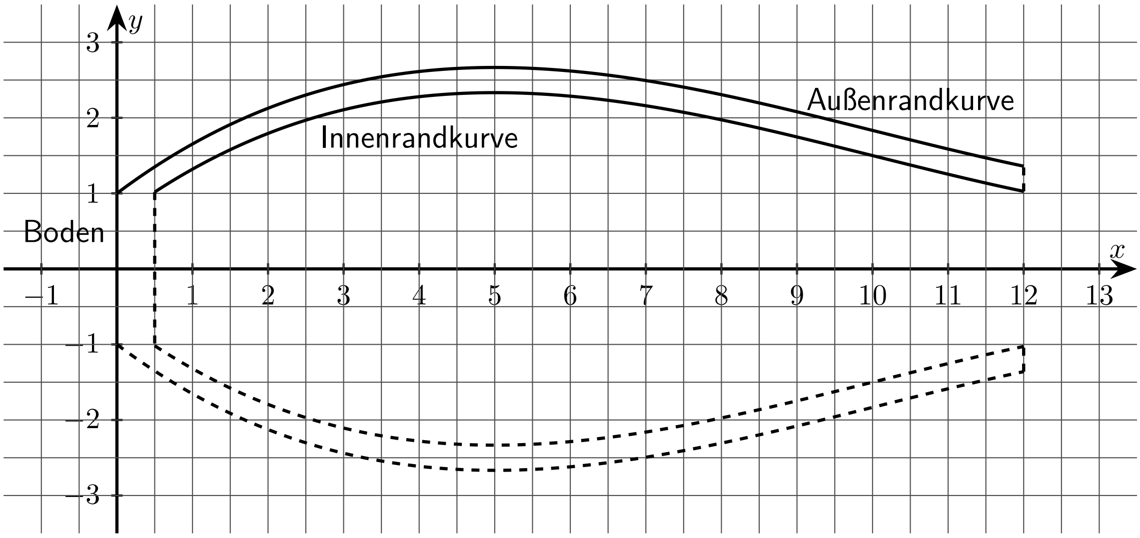
c1) Geben Sie anhand von Abbildung 2 die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an.
Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang. (4 BE)

c2) Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt $320\,\mathrm{km}$, die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt $500\,\mathrm{km}$.
Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von $0\,^\circ\mathrm{C}$. (5 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
a1) Mit $f_a(0) = 2\,a$ folgt $2\,a = 4 \;\Leftrightarrow\; a = 2$.	2		
a2) $f_a'(x) = x^2 - a$; $f_a''(x) = 2\,x$ Wegen $f_a''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ und $f_a'''(x) = 2$, also $f_a'''(0) \neq 0$, besitzt der Graph von f_a genau einen Wendepunkt: $(0\,\vert\,2\,a)$.	2 3		
a3) $\displaystyle\int_0^2 f_a(x)\,dx = \left[\frac{1}{12}\,x^4 - \frac{1}{2}\,a\,x^2 + 2\,a\,x\right]_0^2 = \frac{4}{3} + 2\,a$ $\displaystyle\frac{4}{3} + 2\,a = 0 \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{2}{3}$		3 1	
b1) $f(x) - (7\,x - 14) = \frac{1}{3}\,x^3 - 2\,x + 4 - (7\,x - 14) = \frac{1}{3}\,x^3 - 9\,x + 18$; $\frac{1}{3}\cdot(x-3)^2\cdot(x+6) = \frac{1}{3}\cdot(x^2 - 6\,x + 9)\cdot(x+6)$ $= \frac{1}{3}\cdot(x^3 - 6\,x^2 + 9\,x + 6\,x^2 - 36\,x + 54)$ $= \frac{1}{3}\,x^3 - 9\,x + 18$ Wegen $f(x) = 7\,x - 14 \;\Leftrightarrow\; f(x) - (7\,x - 14) = 0$ $\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}\cdot(x-3)^2\cdot(x+6) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3 \vee x = -6$ haben t und G_f genau zwei gemeinsame Punkte.		4 2	
b2) Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ ist für $k \geq 1{,}5$ der Inhalt des Flächenstücks zwischen G_f und der x-Achse über dem Intervall $[k\,;\,k+1]$. Aus Abbildung 1 ergibt sich: Der Wert des Integrals ist für $k = 1{,}5$ kleiner als 4 und wird mit wachsendem Wert von k kontinuierlich größer, auch größer als 4. Daher gibt es genau eine Lösung der Gleichung mit $k \geq 1{,}5$.			3 1
c1) $(22\,\vert\,1{,}2)$ Die größte tatsächliche Reichweite liegt bei einer Außentemperatur von $22\,^\circ\mathrm{C}$ vor. Diese beträgt das $1{,}2$-fache der Nennreichweite.		1 3	
c2) Auto B: $r(0)\cdot 500\,\mathrm{km} \approx 0{,}7\cdot 500\,\mathrm{km} = 350\,\mathrm{km}$ Auto A: $r(x)\cdot 320\,\mathrm{km} \approx 350\,\mathrm{km}$ Es folgt $r(x) \approx \dfrac{350\,\mathrm{km}}{320\,\mathrm{km}} \approx 1{,}1$. Aus Abbildung 2 ergibt sich z. B. $x \approx 14$ und damit eine Außentemperatur von etwa $14\,^\circ\mathrm{C}$.			5
Summe der Bewertungseinheiten	7	14	9

Aufgabe 2: Analysis-WTR

Eine Glasvase wird durch einen Rotationskörper modelliert, der durch die Rotation von zwei Funktionsgraphen um die x-Achse entsteht (siehe Abbildung).



Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.

Die Außenrandkurve in der Abbildung wird im Intervall $[\,0\,;\,12\,]$ beschrieben durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 1$, wobei a, b und c reelle Zahlen sind.

a) Der Graph der Funktion f hat an der Stelle $x = 5$ einen Hochpunkt. An der Stelle $x = 10$ hat der Graph einen Wendepunkt und die Steigung $-\dfrac{1}{4}$.

a1) Leiten Sie einen Funktionsterm von f her. (6 BE)

[zur Kontrolle: $f(x) = \dfrac{1}{300}\,x^3 - \dfrac{1}{10}\,x^2 + \dfrac{3}{4}\,x + 1$]

a2) Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f an allen Stellen x mit $x \leq 0$ rechtsgekrümmt ist. (2 BE)

a3) Die Vase steht aufrecht in einer geschlossenen zylinderförmigen Verpackung, so dass der Boden der Vase auf deren kreisförmiger Grundfläche steht. Der Radius und die Höhe der zylinderförmigen Verpackung sind so klein wie möglich gewählt.
Berechnen Sie den Inhalt der Außenfläche der Verpackung. Vernachlässigen Sie dabei die Dicke des Verpackungsmaterials. (4 BE)

b) Die Innenrandkurve in der Abbildung wird im Intervall $[0{,}5\,;\,12]$ beschrieben durch den Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = \frac{1}{300}\,x^3 - \frac{1}{10}\,x^2 + \frac{3}{4}\,x + \frac{2}{3}\,.$$

b1) Im Rahmen einer Aufgabe im Sachkontext wird die folgende Berechnung durchgeführt:

$$\pi \cdot \int_{0{,}5}^{0{,}5+h} \left(g(x)\right)^2 dx = 120 \quad \Rightarrow \quad h \approx 9{,}58$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung. (2 BE)

b2) Ein Kubikzentimeter Glas hat eine Masse von $2{,}5$ Gramm.
Berechnen Sie die Masse der leeren Vase. (5 BE)

c) Im Folgenden wird die Schar der Funktionen h_k mit

$$h_k(x) = k\,x \cdot e^{-k\,x+1} + 3 \qquad \text{mit } k > 0$$

betrachtet. Für die erste Ableitungsfunktion h_k' gilt:

$$h_k'(x) = \left(k - k^2\,x\right) \cdot e^{-k\,x+1}$$

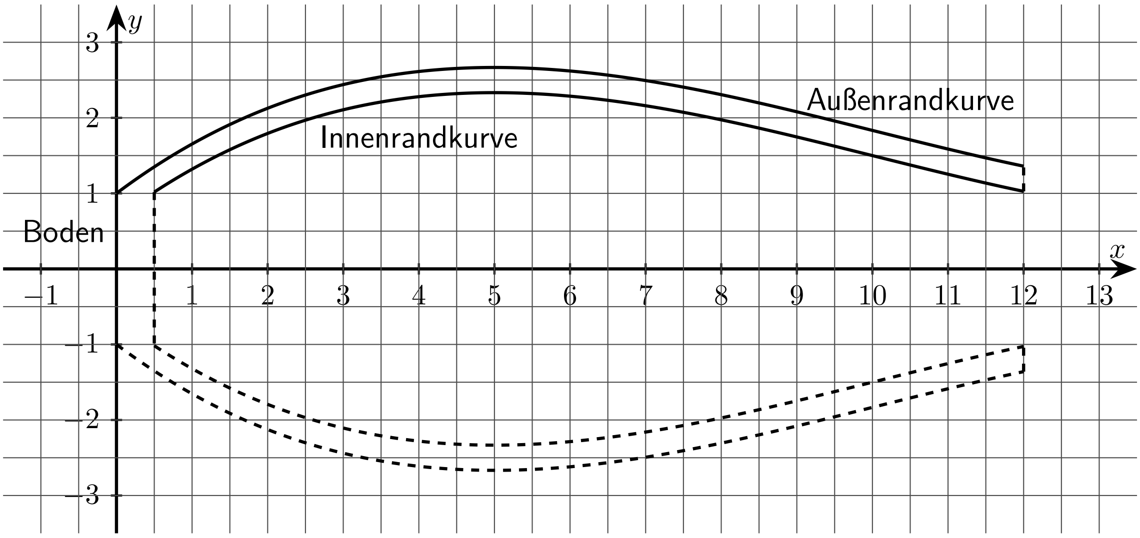
c1) Jede Funktion h_k hat genau eine Extremstelle.
Zeigen Sie, dass dies die Stelle $x = \dfrac{1}{k}$ ist. (2 BE)

c2) Jede Funktion h_k hat genau eine Wendestelle. Es gibt einen Wert für k, so dass die Extremstelle und die Wendestelle von h_k den Abstand 5 haben.
Bestimmen Sie diesen Wert für k. (5 BE)

c3) Der Graph von h_k hat in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse eine positive Steigung.
Bestimmen Sie alle Werte für k, so dass der Schnittwinkel des Graphen von h_k und der y-Achse eine Größe von mindestens $45°$ und höchstens $60°$ hat. (4 BE)

Aufgabe 2: Analysis-WTR

Eine Glasvase wird durch einen Rotationskörper modelliert, der durch die Rotation von zwei Funktionsgraphen um die x-Achse entsteht (siehe Abbildung).



Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Zentimeter in der Wirklichkeit.

Die Außenrandkurve in der Abbildung wird im Intervall $[\,0\,;\,12\,]$ beschrieben durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 1$, wobei a, b und c reelle Zahlen sind.

a) Der Graph der Funktion f hat an der Stelle $x = 5$ einen Hochpunkt. An der Stelle $x = 10$ hat der Graph einen Wendepunkt und die Steigung $-\dfrac{1}{4}$.

a1) Leiten Sie einen Funktionsterm von f her. (6 BE)

[zur Kontrolle: $f(x) = \dfrac{1}{300}\,x^3 - \dfrac{1}{10}\,x^2 + \dfrac{3}{4}\,x + 1$]

a2) Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f an allen Stellen x mit $x \leq 0$ rechtsgekrümmt ist. (2 BE)

a3) Die Vase steht aufrecht in einer geschlossenen zylinderförmigen Verpackung, so dass der Boden der Vase auf deren kreisförmiger Grundfläche steht. Der Radius und die Höhe der zylinderförmigen Verpackung sind so klein wie möglich gewählt.
Berechnen Sie den Inhalt der Außenfläche der Verpackung. Vernachlässigen Sie dabei die Dicke des Verpackungsmaterials. (4 BE)

b) Die Innenrandkurve in der Abbildung wird im Intervall $[0{,}5\,;\,12]$ beschrieben durch den Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = \frac{1}{300}\,x^3 - \frac{1}{10}\,x^2 + \frac{3}{4}\,x + \frac{2}{3}\,.$$

b1) Im Rahmen einer Aufgabe im Sachkontext wird die folgende Berechnung durchgeführt:

$$\pi \cdot \int_{0{,}5}^{0{,}5+h} \left(g(x)\right)^2 dx = 120 \quad \Rightarrow \quad h \approx 9{,}58$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung. (2 BE)

b2) Ein Kubikzentimeter Glas hat eine Masse von $2{,}5$ Gramm.
Berechnen Sie die Masse der leeren Vase. (5 BE)

c) Im Folgenden wird die Schar der Funktionen h_k mit

$$h_k(x) = k\,x \cdot e^{-k\,x+1} + 3 \qquad \text{mit } k > 0$$

betrachtet. Für die erste Ableitungsfunktion h_k' gilt:

$$h_k'(x) = \left(k - k^2\,x\right) \cdot e^{-k\,x+1}$$

c1) Jede Funktion h_k hat genau eine Extremstelle.
Zeigen Sie, dass dies die Stelle $x = \dfrac{1}{k}$ ist. (2 BE)

c2) Jede Funktion h_k hat genau eine Wendestelle. Es gibt einen Wert für k, so dass die Extremstelle und die Wendestelle von h_k den Abstand 5 haben.
Bestimmen Sie diesen Wert für k. (5 BE)

c3) Der Graph von h_k hat in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse eine positive Steigung.
Bestimmen Sie alle Werte für k, so dass der Schnittwinkel des Graphen von h_k und der y-Achse eine Größe von mindestens $45°$ und höchstens $60°$ hat. (4 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
a1) $f'(x) = 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c$ $f''(x) = 6\,a\,x + 2\,b$	1		
$\left\| \begin{array}{lcl} f'(5) & = & 0 \\ f''(10) & = & 0 \\ f'(10) & = & -\frac{1}{4} \end{array} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{lcl} 75\,a + 10\,b + c & = & 0 \\ 60\,a + 2\,b & = & 0 \\ 300\,a + 20\,b + c & = & -\frac{1}{4} \end{array} \right\|$	4		
Damit folgt $a = \frac{1}{300}$, $b = -\frac{1}{10}$, $c = \frac{3}{4}$ und $f(x) = \frac{1}{300}\,x^3 - \frac{1}{10}\,x^2 + \frac{3}{4}\,x + 1$.	1		
a2) Die ganzrationale Funktion dritten Grades f hat genau eine Wendestelle bei $x = 10$ und somit nur einen Krümmungswechsel. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass der Graph von f für $x < 10$ rechtsgekrümmt ist, also insbesondere für $x \leq 0$. *Eine Begründung über die zweite Ableitung ist ebenfalls möglich.*		2	
a3) $f(5) = \frac{8}{3}$ Mit $2\,\pi \cdot \frac{8}{3} \cdot 12 + 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{704}{9}\,\pi \approx 245{,}7$ folgt, dass der Inhalt der Außenfläche der Verpackung etwa $245{,}7\,\mathrm{cm}^2$ beträgt.		4	
b1) Die Vase ist mit $120\,\mathrm{cm}^3$ Wasser gefüllt. Bestimmen Sie die Füllhöhe.		2	
b2) $\pi \cdot \int_0^{12} (f(x))^2\,dx - \pi \cdot \int_{0{,}5}^{12} (g(x))^2\,dx \approx 180{,}2 - 129{,}5 = 50{,}7$		4	
Mit $2{,}5 \cdot 50{,}7 \approx 126{,}8$ beträgt die Masse ungefähr $126{,}8\,\mathrm{g}$.		1	
c1) $h_k'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; k - k^2\,x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{k}$	2		
c2) $h_k''(x) = -k^2 \cdot e^{-k\,x+1} + (k - k^2\,x) \cdot (-k) \cdot e^{-k\,x+1}$ $= (-2 + k\,x) \cdot k^2 \cdot e^{-k\,x+1}$			2
Für die Wendestelle x gilt $h_k''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; k\,x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2}{k}$. Mit $\left\|\frac{2}{k} - \frac{1}{k}\right\| = 5 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{k} = 5 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{1}{5}$			3
c3) Der Graph von h_k hat an der Stelle $x = 0$ den Steigungswinkel α mit $\tan(\alpha) = h_k'(0) = k \cdot e$. Es muss gelten $30° \leq \alpha \leq 45°$.			2
Mit $k = \frac{\tan(\alpha)}{e}$ ergibt sich: $\frac{\tan(30°)}{e} \leq k \leq \frac{\tan(45°)}{e} \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{3}}{3\,e} \leq k \leq \frac{1}{e}$			2
Summe der Bewertungseinheiten	8	13	9

Aufgabe 3: Analytische Geometrie-WTR

Über einer Bühne wird ein Segeltuch angebracht. In einem Koordinatensystem wird das Segeltuch durch das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(0\,|\,0\,|\,8)$, $B(6\,|\,4\,|\,7)$ und $C(-1\,|\,6\,|\,4)$ modelliert. Die x_1x_2-Ebene stellt die Lage der Bühne dar.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

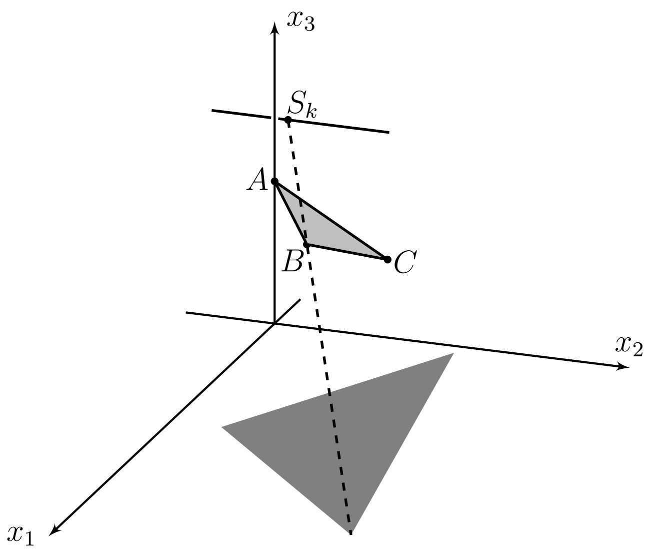
a) a1) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist. (4 BE)

a2) Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (3 BE)

[zur Kontrolle: $-2\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_3 = 64$]

a3) Der Neigungswinkel des Segeltuchs entspricht dem Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene.
Berechnen Sie die Größe dieses Schnittwinkels. (3 BE)

b) Ein Scheinwerfer kann auf einer Schiene hin- und herbewegt werden. Der Scheinwerfer wird als punktförmig angenommen. Seine möglichen Positionen werden durch die Menge der Punkte $S_k(-4\,|\,k\,|\,10)$ mit $k \in [\,-5\,;\,5\,]$ beschrieben.
Im Scheinwerferlicht erzeugt das Segeltuch einen Schatten auf der Bühne.



b1) Ermitteln Sie alle möglichen Abstände, die zwischen der Position des Scheinwerfers und der durch A beschriebenen Ecke des Segeltuchs vorliegen können. (4 BE)

b2) Die durch B beschriebene Ecke des Segeltuchs erzeugt einen Schattenpunkt auf der Bühne.
Untersuchen Sie, ob es eine Position des Scheinwerfers gibt, so dass dieser Schattenpunkt durch einen Punkt auf einer der Koordinatenachsen in der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. (6 BE)

Aufgabe 3: Analytische Geometrie-WTR

Über einer Bühne wird ein Segeltuch angebracht. In einem Koordinatensystem wird das Segeltuch durch das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(0\,|\,0\,|\,8)$, $B(6\,|\,4\,|\,7)$ und $C(-1\,|\,6\,|\,4)$ modelliert. Die x_1x_2-Ebene stellt die Lage der Bühne dar.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

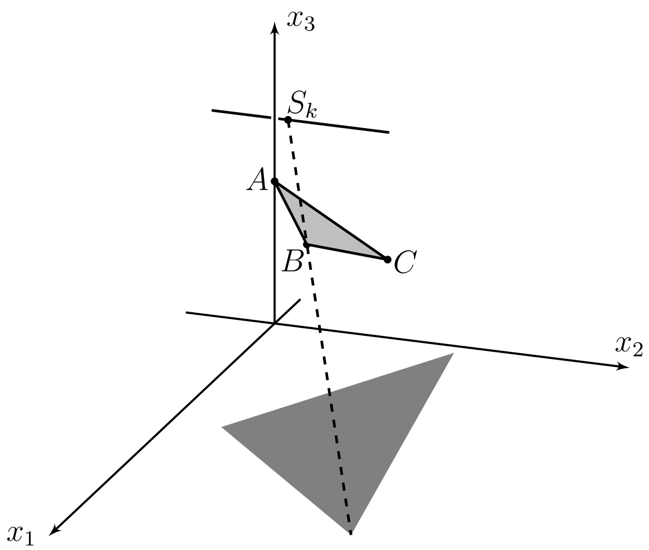
a) a1) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist. (4 BE)

a2) Das Dreieck ABC liegt in einer Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (3 BE)

[zur Kontrolle: $-2\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_3 = 64$]

a3) Der Neigungswinkel des Segeltuchs entspricht dem Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene.
Berechnen Sie die Größe dieses Schnittwinkels. (3 BE)

b) Ein Scheinwerfer kann auf einer Schiene hin- und herbewegt werden. Der Scheinwerfer wird als punktförmig angenommen. Seine möglichen Positionen werden durch die Menge der Punkte $S_k(-4\,|\,k\,|\,10)$ mit $k \in [\,-5\,;\,5\,]$ beschrieben.
Im Scheinwerferlicht erzeugt das Segeltuch einen Schatten auf der Bühne.



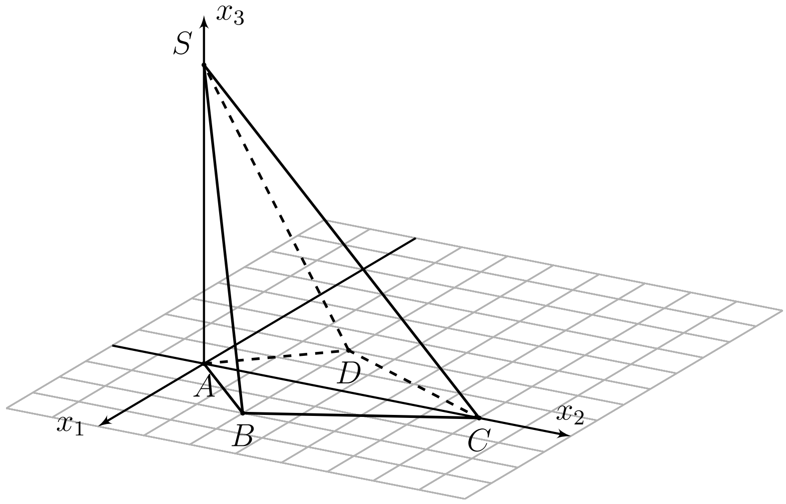
b1) Ermitteln Sie alle möglichen Abstände, die zwischen der Position des Scheinwerfers und der durch A beschriebenen Ecke des Segeltuchs vorliegen können. (4 BE)

b2) Die durch B beschriebene Ecke des Segeltuchs erzeugt einen Schattenpunkt auf der Bühne.
Untersuchen Sie, ob es eine Position des Scheinwerfers gibt, so dass dieser Schattenpunkt durch einen Punkt auf einer der Koordinatenachsen in der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. (6 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
a1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ Wegen $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{53} \neq \sqrt{62} = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ sind genau zwei Seiten des Dreiecks ABC gleich lang.	4		
a2) Mit $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E.		2	
Wegen $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 64$ ist $-2\,x_1 + 5\,x_2 + 8\,x_3 = 64$ eine Gleichung von E.		1	
a3) Für den Schnittwinkel φ zwischen E und der x_1x_2-Ebene gilt $\cos(\varphi) = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} = \frac{8}{\sqrt{93}}$ und daher $\varphi \approx 33{,}9°$.		3	
b1) $d_k = \lvert\overrightarrow{AS_k}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{20 + k^2}$		2	
$d_0 = \sqrt{20 + 0^2} \approx 4{,}47$; $d_{-5} = d_5 = \sqrt{20 + 5^2} \approx 6{,}71$ Es sind alle Abstände zwischen ca. $4{,}47\,\mathrm{m}$ und $6{,}71\,\mathrm{m}$ möglich.		2	
b2) $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BS_k} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ k-4 \\ 3 \end{pmatrix}$ Aus $x_3 = 0$ folgt $t = -\frac{7}{3}$.			3
Wegen $x_1 = 6 - \frac{7}{3} \cdot (-10) \neq 0$ beschreibt der Ortsvektor $\vec{x}$ keinen Punkt auf der x_2-Achse.			1
Wegen $x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 4 - \frac{7}{3}\,k + \frac{28}{3} \;\Leftrightarrow\; k = \frac{40}{7} \approx 5{,}71$ beschreibt der Ortsvektor $\vec{x}$ für $k \in [-5\,;\,5]$ auch keinen Punkt auf der x_1-Achse.			2
Summe der Bewertungseinheiten	4	10	6

Aufgabe 4: Analytische Geometrie-WTR

Die Abbildung zeigt die Pyramide $ABCDS$. Ihre Grundfläche $ABCD$ ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(2\,|\,2\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$ und $D(-2|\,2\,|\,0)$. Die Spitze der Pyramide liegt im Punkt $S(0\,|\,0\,|\,6)$.



a) Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide $ABCDS$. (4 BE)

b) Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

b1) Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind.

Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ein Normalenvektor von E ist. (3 BE)

b2) Die Ebene E hat die Gleichung $2\,x_1 + x_2 + x_3 = 6$.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (3 BE)

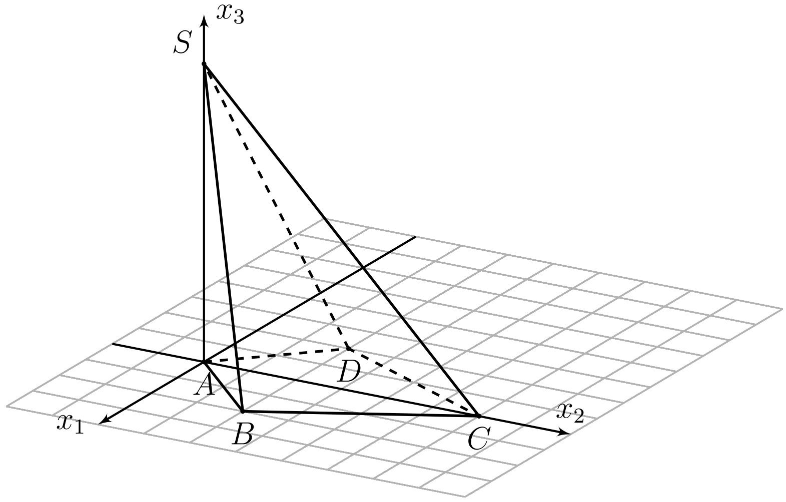
c) Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k : k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2\,k$ mit $k \in \,]\,0\,;\,3\,[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide $ABCDS$ in einem Dreieck BDQ_k, wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $\overline{SC}$ liegt.

c1) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide $ABCDS$ ein. (4 BE)

c2) Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert. (6 BE)

Aufgabe 4: Analytische Geometrie-WTR

Die Abbildung zeigt die Pyramide $ABCDS$. Ihre Grundfläche $ABCD$ ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(2\,|\,2\,|\,0)$, $C(0\,|\,6\,|\,0)$ und $D(-2|\,2\,|\,0)$. Die Spitze der Pyramide liegt im Punkt $S(0\,|\,0\,|\,6)$.



a) Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide $ABCDS$. (4 BE)

b) Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

b1) Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind.

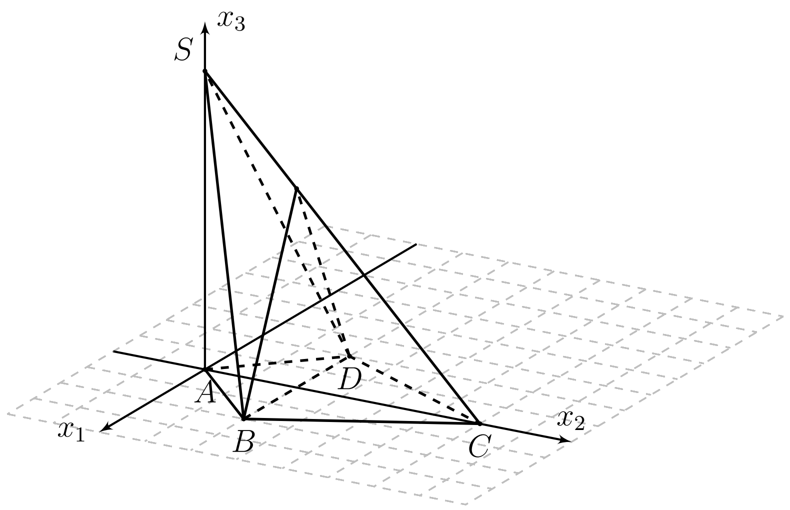
Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ein Normalenvektor von E ist. (3 BE)

b2) Die Ebene E hat die Gleichung $2\,x_1 + x_2 + x_3 = 6$.
Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (3 BE)

c) Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k : k \cdot x_2 + (k-2) \cdot x_3 = 2\,k$ mit $k \in \,]\,0\,;\,3\,[$. Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide $ABCDS$ in einem Dreieck BDQ_k, wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $\overline{SC}$ liegt.

c1) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide $ABCDS$ ein. (4 BE)

c2) Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert. (6 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
a) kleinste Kantenlänge: $\left\vert\overline{AB}\right\vert = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$ Inhalt der Grundfläche der Pyramide: $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12$ Volumen der Pyramide: $\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 6 = 24$	1 3		
b1) $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches von $\overrightarrow{BC}$, $\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches von $\overrightarrow{BS}$. Da die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$ die Ebene E aufspannen und $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ zu diesen Vektoren senkrecht steht, ist $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E.		3	
b2) Für die Größe des Winkels α gilt $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\vert\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\vert\cdot\left\vert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\vert} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Damit folgt $\alpha \approx 65{,}9°$.		3	
c1) z. B. $F_2 : x_2 = 2$ 		1 3	
c2) Der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k ist minimal, wenn $\left\vert\overline{MQ_k}\right\vert$ am kleinsten ist, wobei M den Mittelpunkt von $\overline{BD}$ bezeichnet. Die zugehörige Ebene F_k steht in diesem Fall senkrecht zur Kante $\overline{SC}$. Für diesen Wert von k gibt es ein $r\in\mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}0\\k\\k-2\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\-6\end{pmatrix}$. Daraus folgt $k = 6r \ \wedge\ k-2 = -6r \Rightarrow k-2 = -k \Rightarrow k = 1$.			6
Summe der Bewertungseinheiten	4	10	6

Aufgabe 5: Stochastik-WTR

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß $14\,\%$ das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

a) Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

a1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)

a2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens $10\,\%$ größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

b) Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden $80\,\%$ aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden $90\,\%$ auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit $95\,\%$ etwas höher.

b1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)

b2) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte.
Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde. (3 BE)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von $14\,\%$ durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von $8\,\%$ und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens $14\,\%$". Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

b3) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

b4) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als $20\,\%$ ist, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben.
Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

Aufgabe 5: Stochastik-WTR

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß $14\,\%$ das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

a) Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

a1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)

a2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens $10\,\%$ größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

b) Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden $80\,\%$ aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden $90\,\%$ auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit $95\,\%$ etwas höher.

b1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)

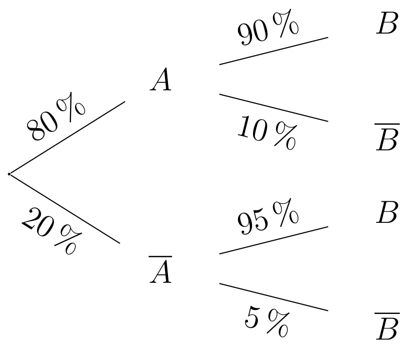
b2) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte.
Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde. (3 BE)

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von $14\,\%$ durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von $8\,\%$ und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens $14\,\%$“. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

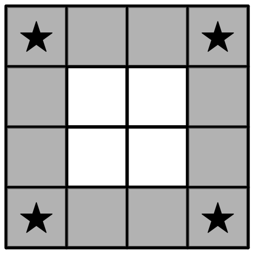
b3) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

b4) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als $20\,\%$ ist, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben.
Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) Für die Anzahl X der Radausflügler gilt $P_{0,14}^{300}(X = 36) \approx 4\,\%$.	1		
a2) $E(X) = 300 \cdot 0{,}14 = 42$ $P_{0,14}^{300}(X \geq 42 + 4{,}2) = P_{0,14}^{300}(X \geq 47) = 1 - P_{0,14}^{300}(X \leq 46) \approx 22\,\%$		3	
b1) A: „Die Fahrkarte wird spätestens am Vortag gebucht." B: „Die Fahrkarte wird genutzt."  	3		
b2) $P_{\overline{B}}(A) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}1}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}08}{P(\overline{B})}$ $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}01}{P(\overline{B})}$ Die zu beurteilende Aussage ist wahr.		3	
b3) X beschreibt wieder die Anzahl der Radausflügler. Zu bestimmen ist die kleinste natürliche Zahl k mit $P_{0,14}^{500}(X \geq k) \leq 8\,\% \;\Leftrightarrow\; P_{0,14}^{500}(X \leq k-1) \geq 92\,\%$. Aus $P_{0,14}^{500}(X \leq 80) \approx 91{,}0\,\%$ und $P_{0,14}^{500}(X \leq 81) \approx 92{,}9\,\%$ ergibt sich $k = 82$. Befinden sich mindestens 82 Radausflügler in der Stichprobe, so wird die Nullhypothese abgelehnt.		4 1	
b4) Zu bestimmen ist die kleinste natürliche Zahl p mit $P_{p\,\%}^{200}(X \leq 35) < 20\,\%$. Aus $P_{0,20}^{200}(X \leq 35) \approx 22\,\%$ und $P_{0,21}^{200}(X \leq 35) \approx 13\,\%$ ergibt sich, dass der tatsächliche Anteil der Radausflügler mindestens $21\,\%$ betragen muss. Obwohl der Anteil der Radausflügler auf über $14\,\%$ gestiegen ist, wird aufgrund des Testergebnisses entschieden, den Betrieb der Shuttlebusse einzustellen.			3 2
Summe der Bewertungseinheiten	4	11	5

Aufgabe 6: Stochastik-WTR

Die Abbildung zeigt insgesamt 16 gleich große Felder.
Von den 12 gefärbten Feldern haben 4 einen Stern.



a) Bei einem Zufallsexperiment leuchtet eines der 16 Felder zufällig auf. Die Wahrscheinlichkeit des Aufleuchtens ist für jedes Feld gleich groß. Es werden die folgenden beiden Ereignisse betrachtet.

G: „Das aufleuchtende Feld ist gefärbt."
S: „Das aufleuchtende Feld hat einen Stern."

a1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das aufleuchtende Feld gefärbt und ohne Stern ist. (1 BE)

a2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{G} \cup S)$. (2 BE)

a3) Geben Sie sowohl die Bedeutung des Terms $P_S(G)$ im Sachkontext als auch dessen Wert an. (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein aufleuchtendes Feld gefärbt ist, beträgt $75\,\%$. Das Zufallsexperiment wird 20-mal durchgeführt. Die Zufallsgröße X gibt dabei an, wie oft ein aufleuchtendes Feld gefärbt ist.

a4) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X

- mehr als 15 beträgt,
- kleiner als $90\,\%$ des Erwartungswerts von X ist. (5 BE)

a5) Ermitteln Sie zwei natürliche Zahlen a und b, so dass gilt:
$P_{0{,}75}^{20}(a \leq X \leq b) = 1 - 0{,}25^{20} - 0{,}75^{20}$ (3 BE)

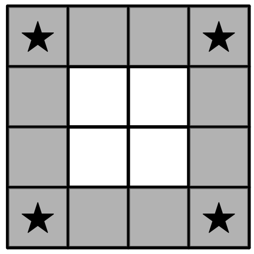
b) Eine Firma programmiert ein Reaktionsspiel, bei dem die obige Abbildung auf einem Touchscreen angezeigt wird. Ein Zufallsgenerator wählt ein Feld aus, dieses leuchtet kurz auf und soll dann möglichst schnell von der spielenden Person berührt werden.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das aufleuchtende Feld einen Stern hat, ist nun p^*.

b1) Bei 100 Durchführungen des Spiels leuchtet 26-mal ein Feld mit Stern auf.
Weisen Sie für diese Situation nach, dass der Wert $0{,}25$ im $95\,\%$-Konfidenzintervall für den Wert von p^* liegt. (3 BE)

b2) Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage für jede natürliche Zahl m mit $m \geq 1$ wahr ist:
Wenn bei $100 \cdot m$ Durchführungen des Spiels $(26 \cdot m)$-mal ein Feld mit Stern aufleuchtet, dann liegt der Wert $0{,}25$ im $95\,\%$-Konfidenzintervall für den Wert von p^*.
(3 BE)

Aufgabe 6: Stochastik-WTR

Die Abbildung zeigt insgesamt 16 gleich große Felder.
Von den 12 gefärbten Feldern haben 4 einen Stern.



a) Bei einem Zufallsexperiment leuchtet eines der 16 Felder zufällig auf. Die Wahrscheinlichkeit des Aufleuchtens ist für jedes Feld gleich groß. Es werden die folgenden beiden Ereignisse betrachtet.

G: „Das aufleuchtende Feld ist gefärbt."
S: „Das aufleuchtende Feld hat einen Stern."

a1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das aufleuchtende Feld gefärbt und ohne Stern ist. (1 BE)

a2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{G} \cup S)$. (2 BE)

a3) Geben Sie sowohl die Bedeutung des Terms $P_S(G)$ im Sachkontext als auch dessen Wert an. (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein aufleuchtendes Feld gefärbt ist, beträgt $75\,\%$. Das Zufallsexperiment wird 20-mal durchgeführt. Die Zufallsgröße X gibt dabei an, wie oft ein aufleuchtendes Feld gefärbt ist.

a4) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X

- mehr als 15 beträgt,
- kleiner als $90\,\%$ des Erwartungswerts von X ist. (5 BE)

a5) Ermitteln Sie zwei natürliche Zahlen a und b, so dass gilt:
$P^{20}_{0,75}(a \leq X \leq b) = 1 - 0{,}25^{20} - 0{,}75^{20}$ (3 BE)

b) Eine Firma programmiert ein Reaktionsspiel, bei dem die obige Abbildung auf einem Touchscreen angezeigt wird. Ein Zufallsgenerator wählt ein Feld aus, dieses leuchtet kurz auf und soll dann möglichst schnell von der spielenden Person berührt werden.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das aufleuchtende Feld einen Stern hat, ist nun p^*.

b1) Bei 100 Durchführungen des Spiels leuchtet 26-mal ein Feld mit Stern auf.
Weisen Sie für diese Situation nach, dass der Wert $0{,}25$ im $95\,\%$-Konfidenzintervall für den Wert von p^* liegt. (3 BE)

b2) Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage für jede natürliche Zahl m mit $m \geq 1$ wahr ist:
Wenn bei $100 \cdot m$ Durchführungen des Spiels $(26 \cdot m)$-mal ein Feld mit Stern aufleuchtet, dann liegt der Wert $0{,}25$ im $95\,\%$-Konfidenzintervall für den Wert von p^*.
(3 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) $\frac{8}{16}$	1		
a2) Es gilt $P(\overline{G} \cup S) = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{1}{2}$.	2		
a3) Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das aufleuchtende Feld unter der Bedingung, dass es einen Stern hat, gefärbt ist. Der Wert des Terms ist 1.		2 1	
a4) $P_{0{,}75}^{20}(X > 15) = 1 - P_{0{,}75}^{20}(X \leq 15) \approx 1 - 0{,}585 = 0{,}415$ Mit $E(X) = 20 \cdot 0{,}75 = 15$ ist $P_{0{,}75}^{20}(X < 0{,}9 \cdot E(X)) = P_{0{,}75}^{20}(X < 13{,}5) = P_{0{,}75}^{20}(X \leq 13) \approx 0{,}214$.	2	3	
a5) Mit $0{,}25^{20} = P_{0{,}75}^{20}(X = 0)$ und $0{,}75^{20} = P_{0{,}75}^{20}(X = 20)$ ist $1 - 0{,}25^{20} - 0{,}75^{20} = P_{0{,}75}^{20}(1 \leq X \leq 19)$ und daher $a = 1$, $b = 19$.			3
b1) Näherungsweise gilt: Die Gleichung $\left\lvert \frac{26}{100} - p \right\rvert = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100}}$ liefert die Grenzen $p \approx 0{,}184$ bzw. $p \approx 0{,}354$ des $95\,\%$-Konfidenzintervalls. Der Wert $0{,}25$ liegt in diesem Intervall.		3	
b2) Die Aussage ist nicht für jede natürliche Zahl m mit $m \geq 1$ wahr. Sie ist z. B. für $m = 100$ falsch: Da die Gleichung $\left\lvert \frac{26 \cdot 100}{100 \cdot 100} - p \right\rvert = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{100 \cdot 100}}$ als untere Grenze des $95\,\%$-Konfidenzintervalls $p \approx 0{,}251$ liefert, liegt der Wert $0{,}25$ nicht in diesem Intervall.			3
Summe der Bewertungseinheiten	5	9	6