Auswahlbogen für Prüflinge
HMF-Aufgaben

Name: ________________________________

(in Druckbuchstaben)

Bearbeiten Sie aus den Ihnen vorliegenden HMF-Aufgaben **alle vier Aufgaben** aus Pool 1, also

HMF 1, HMF 2, HMF 3, HMF 4.

Wählen Sie zusätzlich **genau zwei** der sechs Aufgaben aus Pool 2 durch Ankreuzen aus. Dabei dürfen Sie auch aus demselben Sachgebiet auswählen.

Aus Pool 2 habe ich folgende zwei Aufgaben ausgewählt:

☐ HMF 5 ☐ HMF 6

☐ HMF 7 ☐ HMF 8

☐ HMF 9 ☐ HMF 10

Hinweis: Es müssen genau zwei Kreuze gesetzt werden. In die Bewertung der Abiturprüfung fließt nur die Bearbeitung der vier Aufgaben aus Pool 1 und die der zwei gewählten Aufgaben aus Pool 2 ein.

____

Unterschrift des Prüflings

HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Die Graphen der Funktionen f mit $f(x) = 12\,x - 3\,x^2$ und g mit $g(x) = 6\,x$ schneiden sich an genau zwei Stellen.

1.1 Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g an den Stellen 0 und 2 schneiden.

(2 BE)

1.2 Die Funktion d mit $d(x) = f(x) - g(x)$ hat genau eine Maximalstelle.
Berechnen Sie diese.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$f(0) = 0 = g(0)$ $f(2) = 12 = g(2)$ 2 BE
1.2	$d(x) = 6\,x - 3\,x^2$ $d'(x) = 6 - 6\,x$ $d'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ 3 BE

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = a\,x^3 + a\,x^2$ und $a > 0$.

2.1 Geben Sie den Wert von a an, so dass der Punkt $(1\,|\,6)$ auf dem Graphen von f_a liegt.
(1 BE)

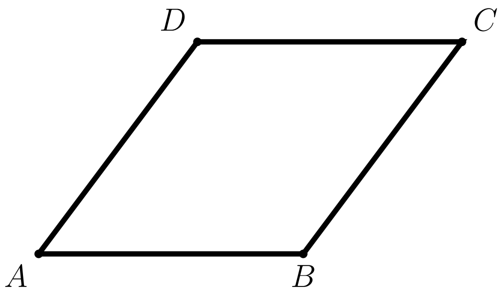
2.2 Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse vollständig einschließt.
(4 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$a = 3$ 1 BE
2.2	$f_a(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; a\,x^2\,(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1 \vee x = 0$ $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(a\,x^3 + a\,x^2\right) dx = \left[\frac{1}{4}a\,x^4 + \frac{1}{3}a\,x^3\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{12}a$ 4 BE

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ mit den Punkten $A(-1\,|\,2\,|\,4)$, $B(1\,|\,3\,|\,2)$ und $C(2\,|\,1\,|\,0)$.

Skizze:



3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten von Punkt D.

(2 BE)

3.2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Parallelogramm $ABCD$ eine Raute, aber kein Quadrat ist.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2 BE
3.2	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 2 - 2 + 4 \neq 0$ 3 BE

HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

In einer Schulklasse mit 24 Kindern bildet ein Drittel der Kinder das Volleyball-Team für ein anstehendes Sportfest. Am Tag des Sportfests sind zwei der Team-Mitglieder und vier der übrigen Kinder der Klasse nicht anwesend.

Von der Klassenliste mit allen 24 Kindern wird ein Kind zufällig ausgewählt.
Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

M: „Das Kind ist Team-Mitglied.“
A: „Das Kind ist anwesend.“

4.1 Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der abgebildeten Vierfeldertafel.

	M	$\overline{M}$	$\sum$
A			
$\overline{A}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{4}{24}$	
$\sum$			1

(3 BE)

4.2 Untersuchen Sie, ob die Ereignisse M und A stochastisch unabhängig sind.

(2 BE)

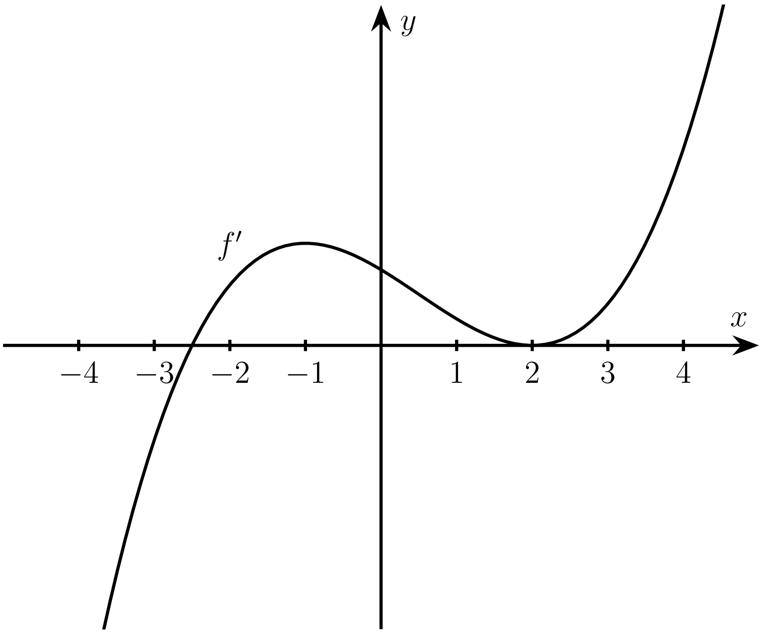
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)
4.1	
4.2	Wegen $P_A(M) = \frac{\frac{6}{24}}{\frac{18}{24}} = \frac{1}{3} = P(M)$ sind die Ereignisse stochastisch unabhängig. 2 BE

	M	$\overline{M}$	$\sum$
A	$\frac{6}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{18}{24}$
$\overline{A}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{6}{24}$
$\sum$	$\frac{8}{24}$	$\frac{16}{24}$	1

3 BE

HMF 5 - Analysis (Pool 2)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades. An der Stelle $x = 2$ berührt der Graph von f' die x-Achse.

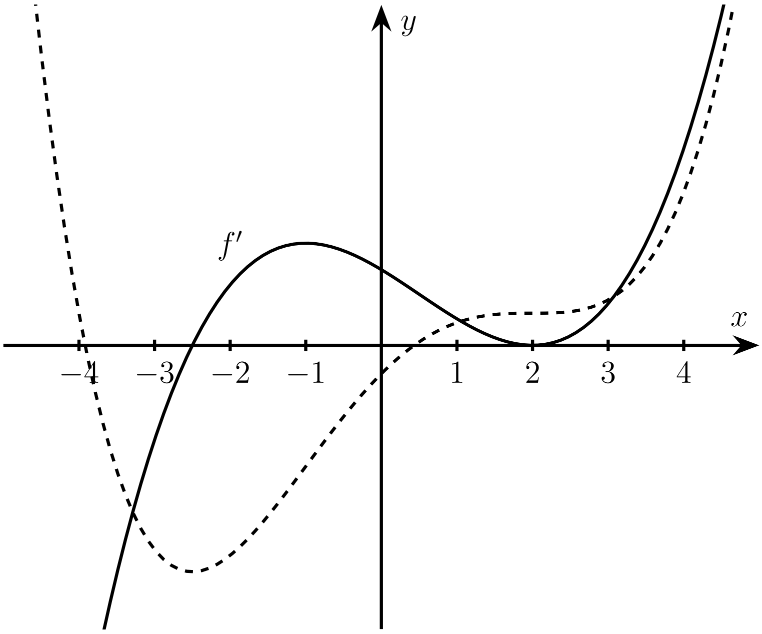


5.1 Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f einen Tiefpunkt hat.

(2 BE)

5.2 Erläutern Sie, gegebenenfalls mithilfe einer Skizze, dass die Funktion f höchstens zwei Nullstellen hat.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analysis (Pool 2)
5.1	Die Funktion f' hat eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Werten. 2 BE
5.2	z. B.  Der Graph von f ergibt sich aus dem skizzierten Graphen durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse. Also hat der Graph von f einen Tiefpunkt, aber keinen Hochpunkt, und somit hat f höchstens zwei Nullstellen. 3 BE

HMF 6 - Analysis (Pool 2)

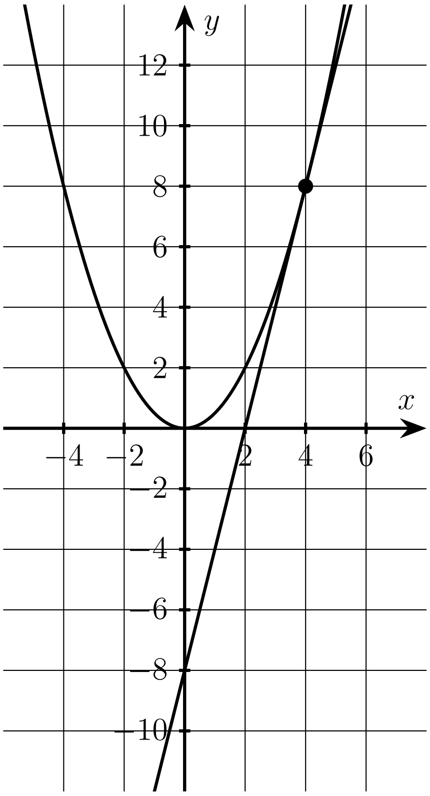
Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit $f_a(x) = a \cdot x^2$.
Die Abbildung zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $(4 \,|\, f_{\frac{1}{2}}(4))$.

6.1 Geben Sie anhand der Abbildung eine Gleichung der Tangente t an.

(1 BE)

6.2 Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u \,|\, f_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0 \,|\, -f_a(u))$ schneidet.

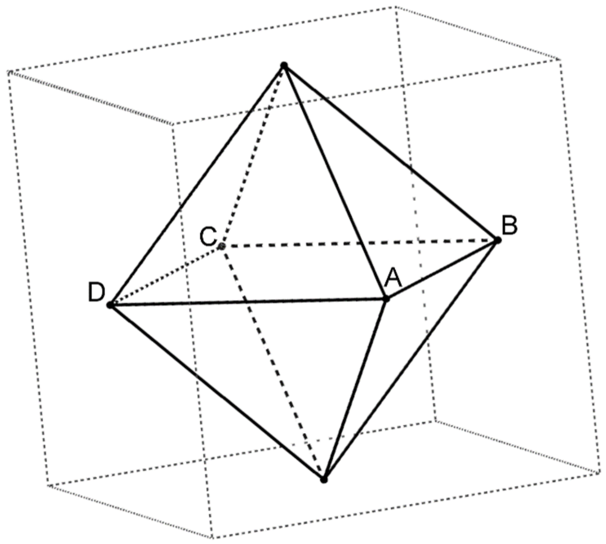
(4 BE)



	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 2)
6.1	$y = 4x - 8$ 1 BE
6.2	Gleichung der Tangente: $y = m\,x + b$ $f_a(u) = a \cdot u^2$; $m = f'_a(u) = 2a \cdot u$ $a \cdot u^2 = 2a \cdot u \cdot u + b \;\Leftrightarrow\; b = -a \cdot u^2$, d. h. $b = -f_a(u)$ 4 BE

HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung). Die Eckpunkte $A(1\,|\,2\,|\,1)$, B, $C(-3\,|\,-6\,|\,9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 6$.



7.1 Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

(2 BE)

7.2 Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.

(3 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)
7.1	Kantenlänge des Würfels: $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{144} = 12$ 2 BE
7.2	Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$ ist $M(-1\,\|-2\,\|\,5)$. Ein Normalenvektor von H ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ mit $\|\vec{n}\| = 3$. Damit ergeben sich die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte, die nicht in H liegen, zu $\overrightarrow{OM} + 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$. *Alternative Lösung:* $\overrightarrow{OM} - 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\1\end{pmatrix}$ 3 BE

HMF 8 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben ist die Schar der Geraden $g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -4\,k \\ k \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

8.1 Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar parallel zueinander sind.

(1 BE)

8.2 Betrachtet wird das Quadrat mit folgenden Eigenschaften:

- Die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$ und $P(11\,|\,4\,|\,5)$ sind Eckpunkte des Quadrats.
- Zwei Seiten des Quadrats liegen auf Geraden der Schar.

Weisen Sie nach, dass O und P keine benachbarten Eckpunkte dieses Quadrats sind.

(4 BE)

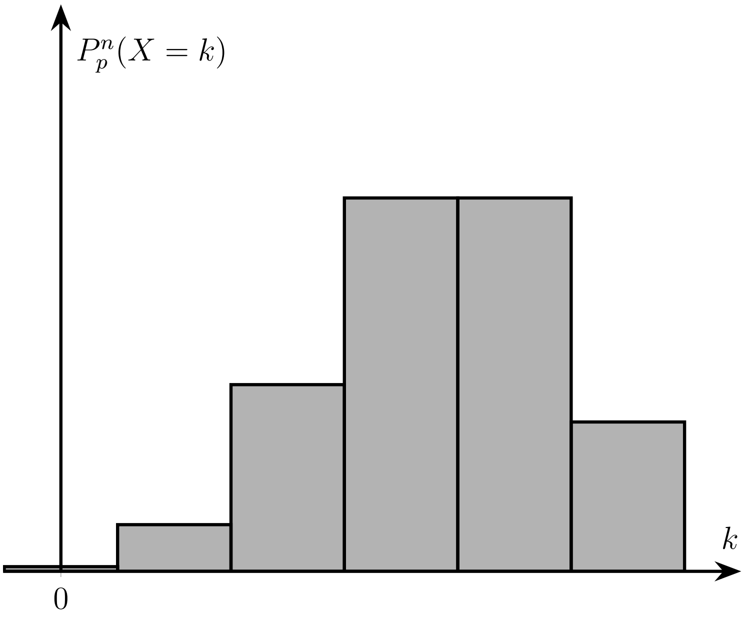
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analytische Geometrie (Pool 2)
8.1	Alle Geraden der Schar haben denselben Vektor als Richtungsvektor. 1 BE
8.2	Da $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$ nicht lösbar ist, sind O und P keine benachbarten Eckpunkte, die auf derselben Gerade der Schar liegen. Da $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 44 + 32 + 5 \neq 0$ ist, sind O und P keine benachbarten Eckpunkte, die auf verschiedenen Geraden der Schar liegen. 4 BE

HMF 9 - Stochastik (Pool 2)

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p mit $0 < p < 1$. Das Histogramm zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Zwei der insgesamt sechs Säulen sind gleich hoch.

Geben Sie n an und ermitteln Sie p.

(5 BE)



	Vorgaben für die Bewertung von HMF 9 - Stochastik (Pool 2)
9.	$n = 5$ 1 BE $P_p^5(X=3) = P_p^5(X=4) \Leftrightarrow \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 = \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$ $\Leftrightarrow 10 \cdot (1-p) = 5 \cdot p$ $\Leftrightarrow p = \frac{2}{3}$ 4 BE

HMF 10 - Stochastik (Pool 2)

Betrachtet werden drei Behälter A, B und C mit weißen und schwarzen Kugeln. Die Behälter sind von außen nicht unterscheidbar. Es gilt:

- Im Behälter A befinden sich dreimal so viele weiße wie schwarze Kugeln.
- Im Behälter B befinden sich 12 weiße und 4 schwarze Kugeln.
- Im Behälter C befinden sich 3 schwarze Kugeln und weiße Kugeln, deren Anzahl mit w bezeichnet wird.

Bei einem Spiel wird einer der drei Behälter zufällig ausgewählt und anschließend daraus eine Kugel zufällig gezogen.

Ist bei diesem Spiel die gezogene Kugel schwarz, kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Behälter C ausgewählt wurde, mit dem Term

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{w+3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{w+3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}$$

berechnet werden.

Weisen Sie dies nach und berechnen Sie w, wenn die beschriebene Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{1}{5}$ hat.

(5 BE)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 10 - Stochastik (Pool 2)
10.	C: „Der zufällig ausgewählte Behälter ist Behälter C.“ S: „Die zufällig entnommene Kugel ist schwarz.“ $P_S(C)=\frac{P(S\cap C)}{P(S)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{w+3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{w+3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{16}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{w+3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{w+3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}$ $P_S(C)=\frac{1}{5}\ \Leftrightarrow\ 5\cdot\frac{1}{w+3}=\frac{1}{w+3}+\frac{1}{6}\ \Leftrightarrow\ 30=6+w+3\ \Leftrightarrow\ w=21$ 5 BE

HMF-Bewertungsbogen für: ________________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$f(0) = 0 = g(0)$ $f(2) = 12 = g(2)$ 2 BE
1.2	$d(x) = 6\,x - 3\,x^2$ $d'(x) = 6 - 6\,x$ $d'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$ 3 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$a = 3$ 1 BE
2.2	$f_a(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; a\,x^2\,(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1 \vee x = 0$ $\int_{-1}^{0} \left(a\,x^3 + a\,x^2\right) dx = \left[\frac{1}{4}a\,x^4 + \frac{1}{3}a\,x^3\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{12}a$ 4 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2 BE
3.2	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\rvert = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 2 - 2 + 4 \neq 0$ 3 BE

Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

4.1

	M	$\overline{M}$	$\sum$
A	$\frac{6}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{18}{24}$
$\overline{A}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{6}{24}$
$\sum$	$\frac{8}{24}$	$\frac{16}{24}$	1

3 BE

4.2 Wegen $P_A(M) = \frac{\frac{6}{24}}{\frac{18}{24}} = \frac{1}{3} = P(M)$ sind die Ereignisse stochastisch unabhängig.

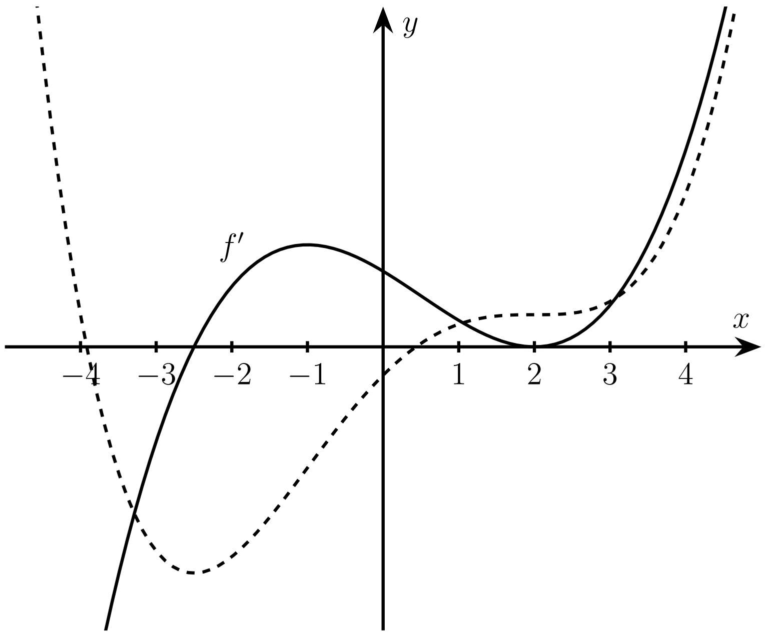
2 BE

Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analysis (Pool 2)

5.1 Die Funktion f' hat eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Werten.

2 BE

5.2 z. B.



Der Graph von f ergibt sich aus dem skizzierten Graphen durch eine Verschiebung in Richtung der y-Achse. Also hat der Graph von f einen Tiefpunkt, aber keinen Hochpunkt, und somit hat f höchstens zwei Nullstellen.

3 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 2)
6.1	$y = 4\,x - 8$ 1 BE
6.2	Gleichung der Tangente: $y = m\,x + b$ $f_a(u) = a \cdot u^2$; $m = f_a'(u) = 2a \cdot u$ $a \cdot u^2 = 2a \cdot u \cdot u + b \;\Leftrightarrow\; b = -a \cdot u^2$, d. h. $b = -f_a(u)$ 4 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)
7.1	Kantenlänge des Würfels: $\left\lvert\overrightarrow{AC}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{144} = 12$ 2 BE
7.2	Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$ ist $M(-1\,\vert-2\,\vert\,5)$. Ein Normalenvektor von H ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ mit $\lvert\vec{n}\rvert = 3$. Damit ergeben sich die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte, die nicht in H liegen, zu $\overrightarrow{OM} + 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\9\end{pmatrix}$. *Alternative Lösung:* $\overrightarrow{OM} - 2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\1\end{pmatrix}$ 3 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analytische Geometrie (Pool 2)
8.1	Alle Geraden der Schar haben denselben Vektor als Richtungsvektor. 1 BE
8.2	Da $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}11\\4\\5\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$ nicht lösbar ist, sind O und P keine benachbarten Eckpunkte, die auf derselben Gerade der Schar liegen. Da $\begin{pmatrix}11\\4\\5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix} = 44 + 32 + 5 \neq 0$ ist, sind O und P keine benachbarten Eckpunkte, die auf verschiedenen Geraden der Schar liegen. 4 BE

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 9 - Stochastik (Pool 2)
9.	$n = 5$ 1 BE $P_p^5(X=3) = P_p^5(X=4) \;\Leftrightarrow\; \binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 = \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$ $\Leftrightarrow\; 10 \cdot (1-p) = 5 \cdot p$ $\Leftrightarrow\; p = \frac{2}{3}$ 4 BE

<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 10 - Stochastik (Pool 2)</th></tr>
<tr><td>10.</td><td>C: „Der zufällig ausgewählte Behälter ist Behälter C.“
S: „Die zufällig entnommene Kugel ist schwarz.“
$P_S(C) = \dfrac{P(S \cap C)}{P(S)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{w+3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{w+3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{16}} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{w+3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{w+3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}$
$P_S(C) = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 5 \cdot \dfrac{1}{w+3} = \dfrac{1}{w+3} + \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow 30 = 6 + w + 3 \Leftrightarrow w = 21$
5 BE</td></tr>
</table>

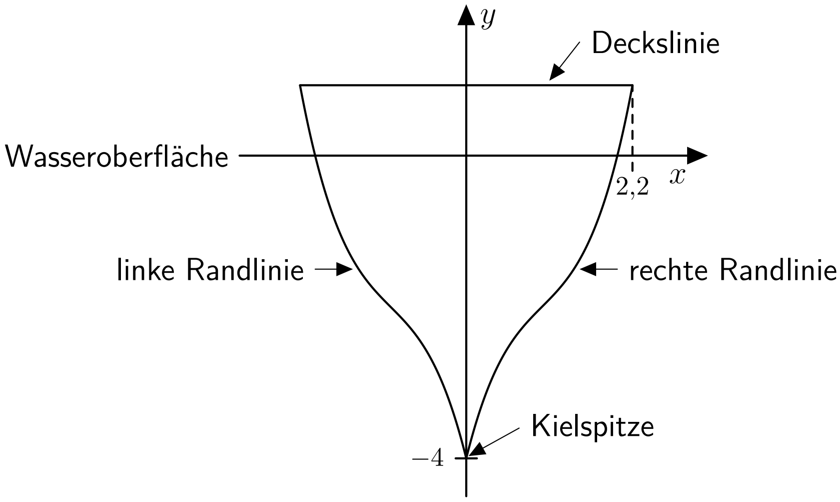
Erstkorrektor: Von 30 Bewertungseinheiten wurden erreicht: ________

Zweitkorrektor: Von 30 Bewertungseinheiten wurden erreicht: ________

Aufgabe 1: Analysis-CAS

a) Die folgende Abbildung stellt einen achsensymmetrischen Querschnitt des Rumpfes einer Segelyacht vereinfacht in einem Koordinatensystem dar. Die x-Achse beschreibt die Lage der Wasseroberfläche und die y-Achse verläuft entlang der Symmetrieachse.

Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.



Die rechte Randlinie wird mithilfe der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 4$$

für $0 \le x \le 2{,}2$ modelliert.

a1) Berechnen Sie die Breite des Querschnitts auf Höhe der Wasseroberfläche und zeigen Sie, dass die Deckslinie ca. $0{,}93\,\mathrm{m}$ über der Wasseroberfläche liegt. (3 BE)

a2) Weisen Sie nach, dass der Graph von f im Intervall $[\,0\,;\,2{,}2\,]$ eine Wendestelle besitzt, und geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes an. (4 BE)

a3) Berechnen Sie die Größe des Winkels, der sich aus der rechten und der linken Randlinie an der Kielspitze im Inneren des Querschnitts ergibt. (4 BE)

a4) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts. (4 BE)

b) Bei der Trainingsfahrt einer Rennyacht wird ihre Geschwindigkeit durch die Funktion v mit

$$v(t) = 20 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}004 \cdot t}\right) \qquad \text{mit} \quad t \geq 0$$

beschrieben. Dabei gibt t die Zeit in Sekunden (s) nach Beginn der Zeitmessung an und $v(t)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$.

b1) Zeigen Sie, dass die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit im Zeitraum von $2\,\mathrm{s}$ bis $10\,\mathrm{s}$ nach Beginn der Zeitmessung ungefähr gleich der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit $6\,\mathrm{s}$ nach Beginn der Zeitmessung ist. (4 BE)

b2) Begründen Sie anhand des Funktionsterms von v, dass die Geschwindigkeit der Yacht stets kleiner als $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist. (2 BE)

b3) Der Wert des Terms $\displaystyle\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$ gibt die Länge des zurückgelegten Weges in Metern innerhalb des Zeitraums von 0 bis T Sekunden an.
Bestimmen Sie den Wert für T, so dass diese Länge 5000 Meter beträgt. (2 BE)

c) Gegeben ist die Schar der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = x^3 - k\,x^2 + 4\,x - 4 \qquad \text{und} \quad k > 0.$$

Der Graph jeder Funktion f_k wird mit G_k bezeichnet. Jeder Graph G_k verläuft durch den Punkt $P(0\,|\,-4)$. Die Abbildung auf dem Beiblatt zeigt G_3.

c1) Zeigen Sie, dass jeweils zwei verschiedene Graphen G_{k_1} und G_{k_2} nur den Punkt P gemeinsam haben. (3 BE)

c2) Bestimmen Sie alle Werte von k, so dass G_k keine waagerechte Tangente besitzt. (4 BE)

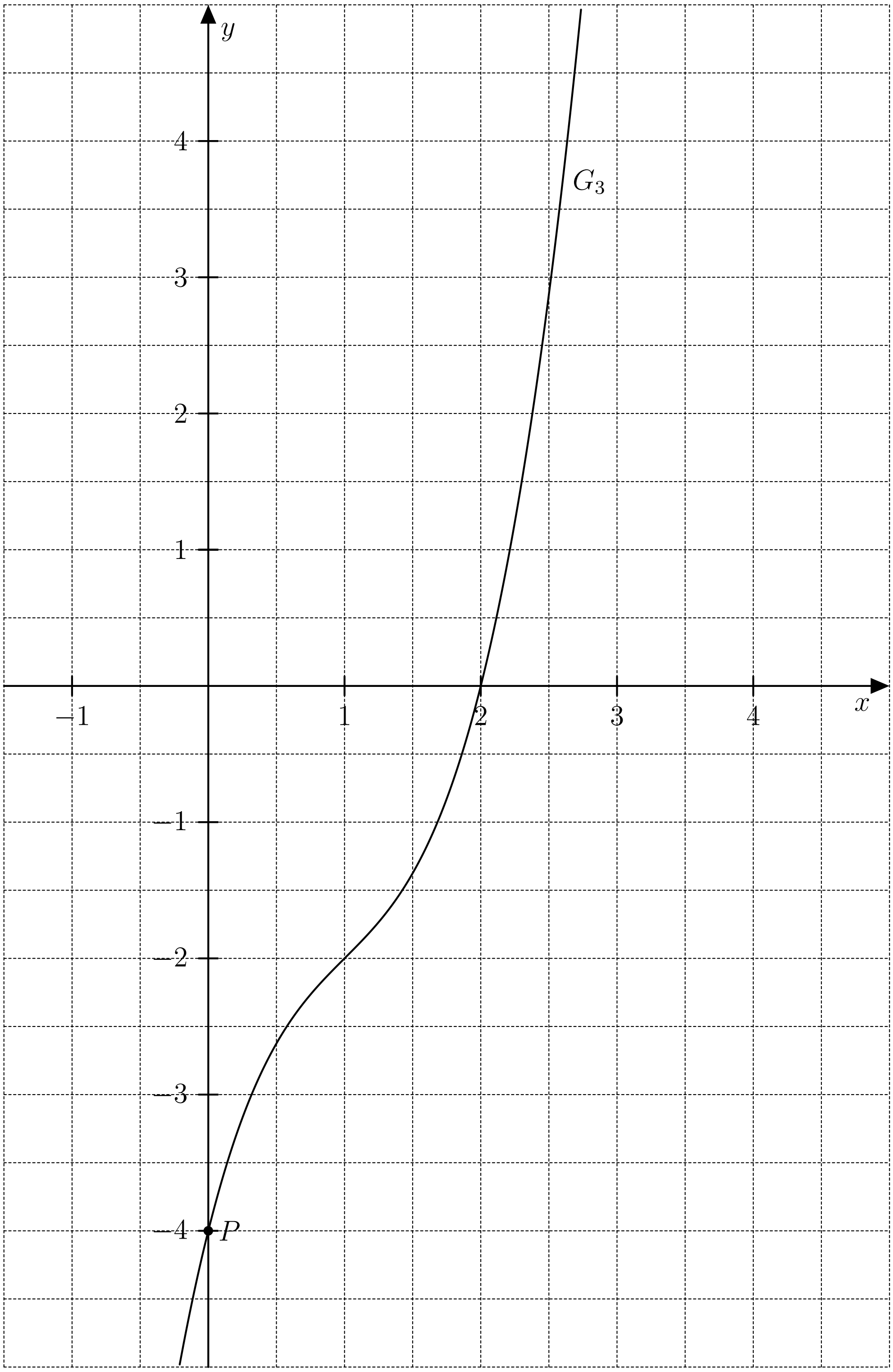
c3) Auf jedem Graphen G_k liegt genau ein von P verschiedener Punkt B_k, so dass die dort angelegte Tangente t_k durch P verläuft.

- Zeichnen Sie B_3 und t_3 in die Abbildung ein.
- Berechnen Sie die x-Koordinate des Berührpunktes B_k in Abhängigkeit von k.

(6 BE)

c4) Zeigen Sie für jeden Punkt Q auf dem Graphen G_k:
Die im Punkt Q angelegte Tangente s hat höchstens einen weiteren gemeinsamen Punkt mit G_k. (4 BE)

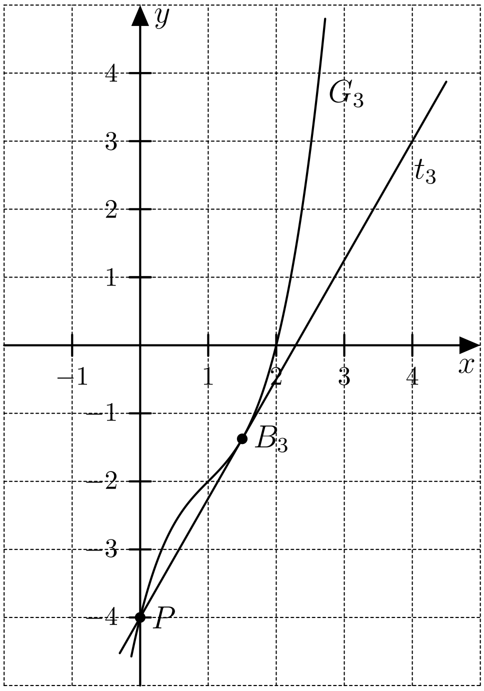
Beiblatt
zu Aufgabenteil c)



Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ Wegen $2 \cdot 2\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}$ beträgt die Breite $4\,\mathrm{m}$. Mit $f(2{,}2)=0{,}928$ folgt, dass die Deckslinie ca. $0{,}93\,\mathrm{m}$ über der Wasseroberfläche liegt.	2 1		
a2) Wegen $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ und $f'''(1)=6 \neq 0$ ist $x=1$ eine Wendestelle. Der Wendepunkt hat die Koordinaten $(1\,\|\,-2)$.	3 1		
a3) Mit $f'(0)=4$ folgt $\alpha = 2\cdot(90° - \arctan(4)) \approx 28°$.		4	
a4) $2 \cdot \int_0^{2,2} (0{,}93 - f(x))\,\mathrm{d}x \approx 11{,}9$ Der Flächeninhalt des Querschnitts beträgt etwa $11{,}9\,\mathrm{m}^2$.		4	
b1) Gerundet auf beispielsweise drei Nachkommastellen ergibt sich $\frac{v(10)-v(2)}{8} \approx 0{,}078$ und $v'(6) \approx 0{,}078$.	4		
b2) Da $\mathrm{e}^{-0{,}004\,t} > 0$ gilt, folgt $v(t) = 20 \cdot (1-\mathrm{e}^{-0{,}004\,t}) < 20$.		2	
b3) $5000 = \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$ liefert $T \approx 460$.		2	
c1) Für $k_1 \neq k_2$ gilt $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \Leftrightarrow x=0$.		3	
c2) $f_k'(x)=0$ liefert $x = \frac{k-\sqrt{k^2-12}}{3}$ oder $x = \frac{k+\sqrt{k^2-12}}{3}$. Falls $k^2-12<0$ ist, also für $k<\sqrt{12}$, hat $f_k'(x)=0$ keine reelle Zahl als Lösung und daher gibt es für $k<\sqrt{12}$ keine waagerechte Tangente an G_k.			2 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

c3)



$f_k(x) = f_k'(x) \cdot x - 4$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0{,}5\,k$
Für die x-Koordinate von B_k gilt $x = 0{,}5\,k$.

</td><td></td><td>2</td><td>2
2</td></tr>
<tr><td>

c4) Die Tangente s an den Graphen G_k im Punkt $Q(q \mid f_k(q))$ wird beschrieben durch $s(x) = f_k(q) + f_k'(q) \cdot (x - q)$.
Wegen $s(x) = f_k(x) \Leftrightarrow x = k - 2\,q \vee x = q$ ist die Aussage wahr.

</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Summe der Bewertungseinheiten</td><td>11</td><td>17</td><td>12</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Analysis-CAS

a) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a^3}x^3 - \frac{1}{a}x^2 + x$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

a1) Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph von f_4 eine Steigung von $-\frac{1}{4}$ hat. (3 BE)

a2) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass der Punkt $(2\,|\,2)$ auf dem Graphen von f_a liegt. (2 BE)

a3) Ermitteln Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2. Weisen Sie nach, dass es genau einen Punkt gibt, der auf jedem Graphen der Schar liegt. (5 BE)

a4) Die Gleichung $f_a(x) = 0$ hat in Abhängigkeit von a die Lösungen

$$0 \text{ und } \frac{a^2 + \sqrt{a^3(a-4)}}{2} \text{ und } \frac{a^2 - \sqrt{a^3(a-4)}}{2}.$$

Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a an und begründen Sie Ihre Angabe anhand der obigen Terme. (4 BE)

a5) Der Graph jeder Funktion f_a hat genau einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie den Wert von a zu dem Wendepunkt mit der größten y-Koordinate. (5 BE)

a6) Im Folgenden gilt $0 < a < 4$.

Abbildung 1 zeigt beispielhaft den Graphen einer Funktion f_a sowie die Gerade g mit der Gleichung $y = x$, die den Graphen in den Punkten $O(0\,|\,0)$ und $P(u_a\,|\,f_a(u_a))$ schneidet. Die Gerade g, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = u_a$ begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck.
Die folgenden Schritte stellen die Lösung einer Aufgabe dar:

- $f_a(x) = x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = a^2$
- $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot f_a(a^2) = 3 \cdot \int_0^{a^2} (x - f_a(x))dx \;\Leftrightarrow\; a = 2$

Erläutern Sie diese Schritte und interpretieren Sie die Lösung $a = 2$ geometrisch. (5 BE)

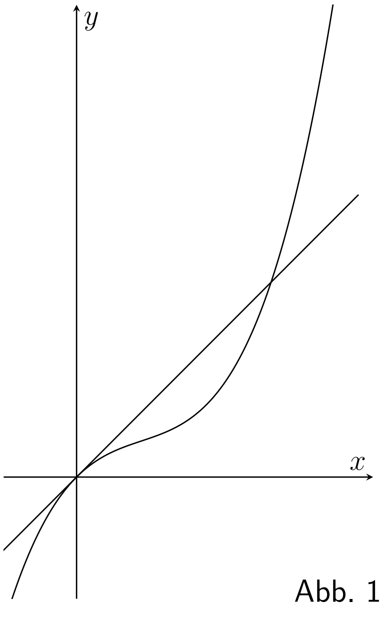


Abb. 1

b) Für ein Umweltschutzprojekt sollen zwei Unterwasserdrohnen $U1$ und $U2$ in einem See Messungen in unterschiedlichen Tiefen vornehmen. Sie bewegen sich nur in vertikaler Richtung, d. h. senkrecht zur Wasseroberfläche des Sees. Ihre Geschwindigkeiten lassen sich für $0 \leq t \leq 30$ mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen v bzw. w beschreiben, wobei gilt:

$$v(t) = -\frac{6}{25}\,t \cdot (4\,t - 25) \cdot e^{-\frac{1}{5}\,t}$$

$$w(t) = \frac{1}{216}\,t^3 - \frac{1}{6}\,t^2 + t$$

Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten, $v(t)$ die Geschwindigkeit von $U1$ in Meter pro Minute und $w(t)$ die Geschwindigkeit von $U2$ in Meter pro Minute. Wenn die Geschwindigkeit in diesem Modell negativ ist, sinkt die Unterwasserdrohne. Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, steigt die Unterwasserdrohne.

b1) Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von v und interpretieren Sie die Werte im Sachkontext. (3 BE)

b2) Mit v' wird die erste Ableitungsfunktion von v bezeichnet.
Innerhalb eines bestimmten Zeitraums gilt für jeden Zeitpunkt t die folgende Aussage: $v(t) < 0$ und $v'(t) > 0$.
Interpretieren Sie dies in Bezug auf die Bewegung von $U1$ in diesem Zeitraum. (2 BE)

b3) Im Beobachtungszeitraum beträgt der geringste Abstand von $U1$ zur Wasseroberfläche des Sees 10 Meter.
Ermitteln Sie den Abstand von $U1$ zur Wasseroberfläche zu Beobachtungsbeginn. (5 BE)

b4) $U2$ ist zu Beobachtungsbeginn 5 Meter tiefer als $U1$ und steigt langsamer als $U1$. Der Graph in Abbildung 2 zeigt für die ersten Minuten des Beobachtungszeitraums die zeitliche Entwicklung des vertikalen Abstands der beiden Unterwasserdrohnen zueinander. Im dargestellten Bereich hat der Graph nur einen Hochpunkt $H(t_H \,|\, y_H)$.

Erläutern Sie, wie man t_H anhand der Graphen von v und w ermitteln kann, und geben Sie einen Term zur Berechnung von y_H an. (6 BE)

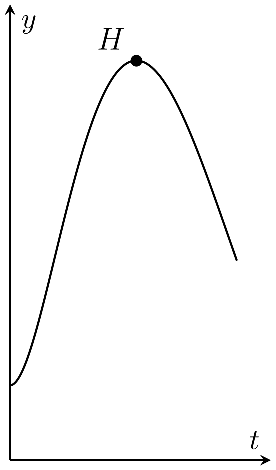


Abb. 2

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) $f_4'(x) = -\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; x = 4 \;\vee\; x = \frac{20}{3}$	3		
a2) Für $a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f_a(2) = 2 \;\Leftrightarrow\; a = \sqrt{2}$.	2		
a3) $f_1(x) = f_2(x) \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = \frac{4}{7}$. $(0\,\|\,0)$ und $(\frac{4}{7}\,\|\,\frac{148}{343})$ sind die gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und f_2. $f_a(0) = 0$ gilt unabhängig von a. Wegen $f_3(\frac{4}{7}) \neq f_1(\frac{4}{7})$ liegt ausschließlich der Koordinatenursprung auf allen Graphen der Schar.		3 2	
a4) Der Wert des Terms $a^3\,(a-4)$ ist für $a = 4$ null, für $0 < a < 4$ negativ und für $a > 4$ positiv. Damit ergibt sich: $a = 4$: zwei Nullstellen; $0 < a < 4$: eine Nullstelle; $a > 4$: drei Nullstellen		4	
a5) $f_a''(x) = 0$ liefert $x = \frac{a^2}{3}$. Die y-Koordinate des Wendepunktes ist $f_a(\frac{a^2}{3})$. Dieser Term nimmt für $a = 3$ seinen maximalen Wert an.		2 3	
a6) Zunächst werden die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden g mit dem Graphen von f_a berechnet. Die Lösung der Gleichung im zweiten Schritt gibt denjenigen Wert von a an, für den das rechtwinklige Dreieck den dreifachen Flächeninhalt besitzt wie das Flächenstück, das von g und dem Graphen von f_a eingeschlossen ist.		2 3	
b1) Die Bestimmung des Tiefpunktes $(t_1\,\|\,y_1)$ ergibt $t_1 \approx 14{,}0$ und $y_1 \approx -6{,}3$. $U1$ hat etwa 14 Minuten nach Beobachtungsbeginn eine Geschwindigkeit von $-6{,}3$ Meter pro Minute.	3		
b2) In diesem Zeitraum sinkt $U1$ immer langsamer.		2	
b3) Es gilt $v(t) > 0$ für $0 < t < 6{,}25$ und $v(t) < 0$ für $6{,}25 < t \leq 30$. $U1$ hat somit $6{,}25$ Minuten nach Beobachtungsbeginn den kleinsten Abstand zur Wasseroberfläche. Abstand von $U1$ zur Wasseroberfläche zu Beobachtungsbeginn in Metern: $10 + \int_0^{6{,}25} v(t)\,dt \approx 31{,}7$			3 2
b4) Bei der t-Koordinate t_S des einzigen Schnittpunkts der Graphen von v und w innerhalb der ersten Minuten wechselt $w(t) < v(t)$ zu $v(t) < w(t)$. Somit nimmt der vertikale Abstand von $U1$ und $U2$ bis zum Zeitpunkt t_S zu und danach wieder ab. Folglich ist $t_H = t_S$. $y_H = 5 + \int_0^{t_S} (v(t) - w(t))\,dt$			6
Summe der Bewertungseinheiten	8	21	11

Aufgabe 3: Analytische Geometrie-CAS

Abbildung 1 zeigt die Pyramide $ABCDS$ mit den Eckpunkten $A(-3\,|-3\,|\,0)$, $B(3\,|-3\,|\,0)$, $C(3\,|\,3\,|\,0)$, $D(-3|\,3\,|\,0)$ und $S(0\,|\,0\,|\,4)$ sowie den Punkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

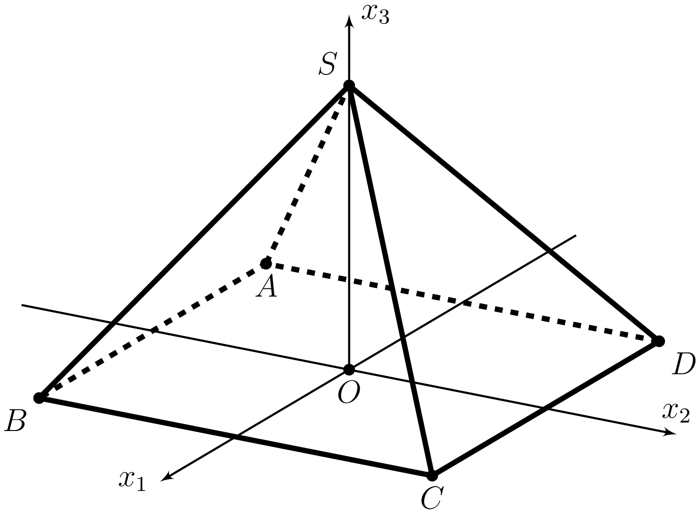


Abbildung 1

a) a1) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. (4 BE)

a2) Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide.
Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x_1 - x_3 = 0$ (2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (3) $x_1 + x_2 = 0$ (3 BE)

a3) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (3 BE)

[*zur Kontrolle:* $E : 4\,x_2 + 3\,x_3 = 12$]

a4) Es gibt einen Punkt $P(0\,|\,0\,|\,p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

$$\text{I.}\quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}0\\0\\p\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \qquad \text{II.}\quad 4 \cdot 4\,t + 3 \cdot (p + 3\,t) = 12 \qquad \text{III.}\quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen. (5 BE)

b) Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen

$$E_k : 4\,k \cdot x_1 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 12 \quad \text{mit } k \in [\,-1\,;\,1\,]\,.$$

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

b1) Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist. (1 BE)

b2) Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist, und bestimmen Sie diese Größe. (4 BE)

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat.
In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

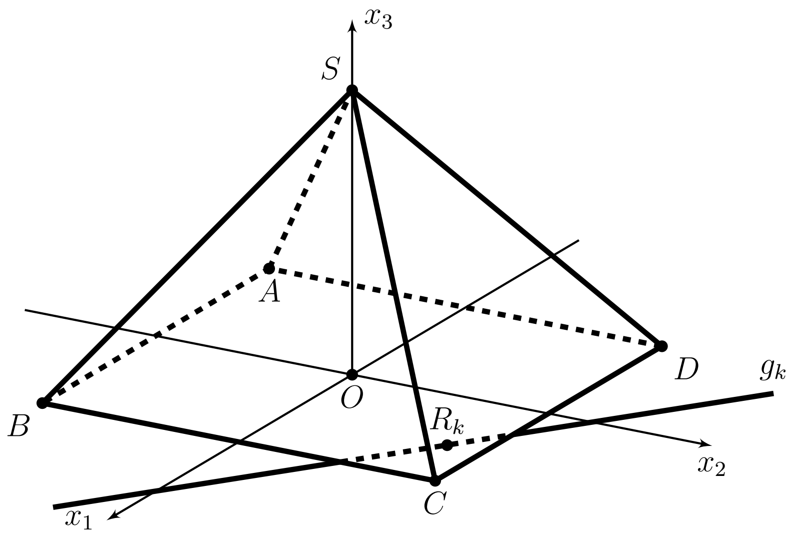
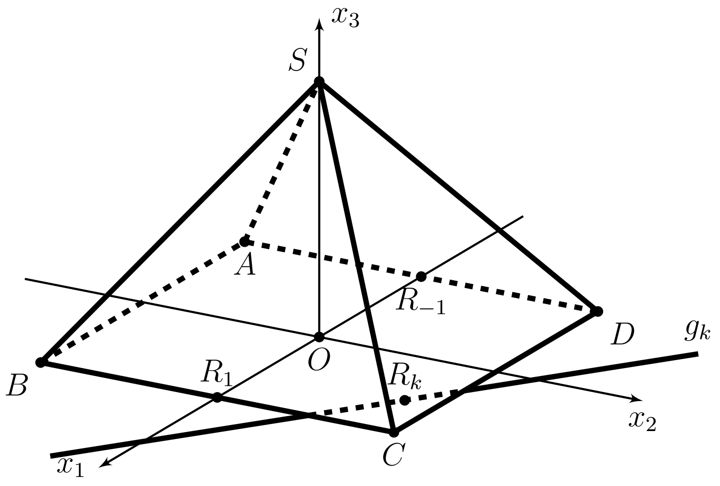


Abbildung 2

b3) Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein. (2 BE)

b4) Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich die Fläche OR_kS um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers. (3 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) Inhalt der Grundfläche: $6 \cdot 6 = 36$ Inhalt einer Seitenfläche: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 15$ Oberflächeninhalt der Pyramide: $36 + 4 \cdot 15 = 96$	1 2 1		
a2) Gleichung (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Die Koordinaten von S erfüllen Gleichung (1) nicht.		1 2	
a3) Mit $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\24\\18\end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$ und $4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$ ist $4\,x_2 + 3\,x_3 = 12$ eine Gleichung der Ebene E.		2 1	
a4) Q ist ein Punkt auf der Lotgeraden zu E durch P. Q liegt außerdem in E und ist damit der Schnittpunkt der Lotgeraden mit E. Der Abstand von P zu E stimmt mit dem Abstand p von P zur Grundfläche überein.			3 2
b1) Für alle $k \in [-1; 1]$ gilt $4\,k \cdot 0 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$.	1		
b2) $\dfrac{\begin{pmatrix}4\,k\\4\sqrt{1-k^2}\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}4\,k\\4\sqrt{1-k^2}\\3\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert} = \dfrac{3}{\sqrt{16\,k^2 + 16 - 16\,k^2 + 9}} = \dfrac{3}{5}$ Damit ist die Größe α des Winkels unabhängig von k. $\sin(\alpha) = \frac{3}{5}$ ergibt $\alpha \approx 36{,}9°$.		4	
b3) 		2	
b4) Der Körper hat die Form eines halbierten Kegels. Volumen dieses Körpers: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 3^2) \cdot 4 = 6\,\pi$			1 2
Summe der Bewertungseinheiten	5	12	8

Aufgabe 4: Analytische Geometrie-CAS

An einem Balkon wird ein Solarmodul montiert. In einem geeigneten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den Erdboden. Das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1\,|\,0\,|\,4)$, $B(3\,|\,0\,|\,4)$, $C(3\,|\,0{,}5\,|\,2{,}8)$ und $D(1\,|\,0{,}5\,|\,2{,}8)$ liegt in einer Ebene E und beschreibt die Moduloberseite. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

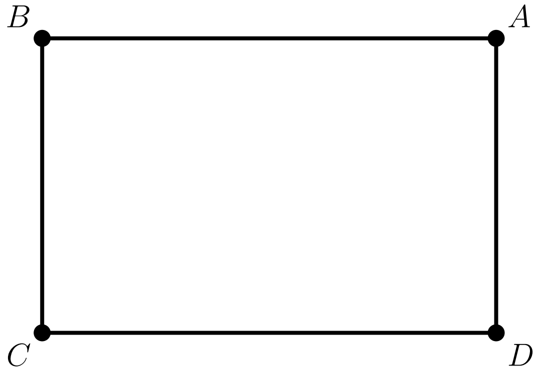
a) a1) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. (3 BE)

a2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Moduloberseite und die Länge einer Diagonalen. (4 BE)

a3) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. (3 BE)

[*zur Kontrolle:* $12\,x_2 + 5\,x_3 = 20$]

a4) Jede Gerade, die in der Ebene E liegt und durch das Innere des Rechtecks $ABCD$ verläuft, teilt das Rechteck in genau zwei Vielecke: ein m-Eck und ein n-Eck.
Geben Sie alle möglichen Paare $(m\,,n)$ mit $m \leq n$ an.
Skizzieren Sie für jedes dieser Paare beispielhaft eine Gerade in die folgende Abbildung. (4 BE)



b) Der Punkt $S(-2\,|\,4{,}25\,|\,5{,}4)$ stellt die Spitze eines Fahnenmastes in der Nähe des Balkons dar. Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen in eine Richtung, die durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Die Spitze des Fahnenmastes erzeugt dabei auf der Moduloberseite einen Schattenpunkt, der im Modell durch den Punkt F dargestellt wird.

b1) Berechnen Sie die Koordinaten von F. (4 BE)

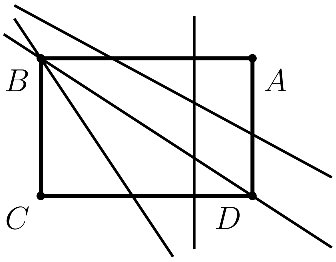
b2) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Gerade durch die Punkte S und F mit der Ebene E. (3 BE)

b3) Nun wird die Richtung der Sonnenstrahlen allgemeiner durch den Vektor $\overrightarrow{v_k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -(1+k) \\ -k^2 \end{pmatrix}$ mit $k > 0$ beschrieben.
Mit Hilfe eines Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ der Ebene E wird die Funktion f mit

$$f(k) = \frac{|\overrightarrow{v_k} \circ \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{v_k}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{5\,k^2 + 12\,k + 12}{13 \cdot \sqrt{k^4 + k^2 + 2\,k + 5}} \quad \text{für} \quad k > 0$$

definiert. Die Funktion f hat genau eine Maximalstelle k^*. Es gilt $k^* \approx 1{,}64$.

Berechnen Sie α mit $\sin(\alpha) = f(k^*)$ und $0° < \alpha < 90°$.
Erläutern Sie die Bedeutung von α im Sachzusammenhang. (4 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) Mit $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\-1{,}2\end{pmatrix}=0$ ist $ABCD$ ein Rechteck.	3		
a2) $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert=2\cdot\sqrt{0{,}5^2+(-1{,}2)^2}=2{,}6$ Der Flächeninhalt der Moduloberseite beträgt $2{,}6\,\mathrm{m}^2$. $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\sqrt{2^2+0{,}5^2+(-1{,}2)^2}\approx 2{,}39$ Die Diagonale ist ca. $2{,}39\,\mathrm{m}$ lang.	2 2		
a3) Wegen $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\-1{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2{,}4\\1\end{pmatrix}$ ist $\vec{n}=5\cdot\begin{pmatrix}0\\2{,}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E. Mit $0\cdot1+12\cdot0+5\cdot4=20$ ergibt sich $12\,x_2+5\,x_3=20$ als Koordinatengleichung von E.		2 1	
a4) Es treten folgende Paare $(m\,,n)$ auf: $(3\,,3)$, $(3\,,4)$, $(3\,,5)$, $(4\,,4)$  			4
b1) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\4{,}25\\5{,}4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $g\cap E:\ 12\cdot(4{,}25-2t)+5\cdot(5{,}4-t)=20\ \Leftrightarrow\ t=2$ $\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}-2\\4{,}25\\5{,}4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0{,}25\\3{,}4\end{pmatrix}$		1 2 1	
b2) Für die Größe des Schnittwinkels α gilt $\sin(\alpha)=\dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right\rvert}=\dfrac{29}{39}$ und damit $\alpha\approx 48{,}0°$.		3	
b3) Mit $f(1{,}64)\approx 0{,}814$ und $\sin(\alpha)=f(k^*)$ ergibt sich $\alpha\approx 54{,}5°$. α ist die Größe des maximalen Winkels, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Moduloberseite treffen.			2 2
Summe der Bewertungseinheiten	7	10	8

Aufgabe 5: Stochastik-CAS

Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

a) Unter den Abonnenten sind $70\,\%$ höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben $80\,\%$ das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich $50\,\%$ für das Komplettpaket entschieden.

a1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)

a2) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist. (3 BE)

a3) Unter allen Abonnenten werden 250 zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- weniger als 170 Abonnenten höchstens 40 Jahre alt sind;
- die Anzahl der Abonnenten, die höchstens 40 Jahre alt sind, um maximal 10 von ihrem Erwartungswert abweicht.

(5 BE)

a4) Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ mehr als 20 Personen älter als 40 Jahre sind. (4 BE)

b) Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit $60\,\%$ soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese „Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens $60\,\%$." mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ getestet werden.

b1) Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte. (2 BE)

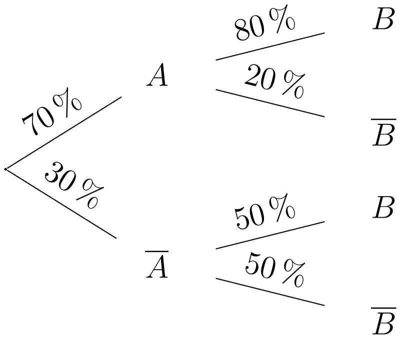
Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132;\, 133;\, \ldots;\, 200\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

b2) Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Z: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Z \geq 132) \approx 0{,}047$

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet. (4 BE)

b3) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als $90\,\%$ betragen könnte. (4 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) A: „Ein Abonnent ist höchstens 40 Jahre alt.“ B: „Ein Abonnent hat das Komplettpaket.“ 	3		
a2) $\frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}5} \approx 79\,\%$		3	
a3) X: Anzahl der Abonnenten, die höchstens 40 Jahre alt sind $P_{0{,}7}^{250}(X < 170) = P_{0{,}7}^{250}(X \leq 169) \approx 22\,\%$ $P_{0{,}7}^{250}(250 \cdot 0{,}7 - 10 \leq X \leq 250 \cdot 0{,}7 + 10)$ $= P_{0{,}7}^{250}(165 \leq X \leq 185) \approx 85\,\%$	2	3	
a4) Y: Anzahl der Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind Wegen $P_{0{,}3}^{103}(Y > 20) = P_{0{,}3}^{103}(Y \geq 21) \approx 98{,}95\,\%$ und $P_{0{,}3}^{104}(Y > 20) \approx 99{,}10\,\%$ müssten mindestens 104 Personen zufällig ausgewählt werden.			4
b1) Es soll möglichst vermieden werden, den Algorithmus dauerhaft einzusetzen, obwohl der Einsatz des Algorithmus die Zufriedenheit unter den Abonnenten nicht erhöht. *Alternative Lösungen im Sachkontext sind möglich.*		2	
b2) Es könnte eine natürliche Zahl k mit $k < 132$ geben, für die $P_{0{,}6}^{200}(Z \geq k) \leq 0{,}05$ gilt. Mit $P_{0{,}6}^{200}(Z \geq 131) \approx 0{,}064$ ist 132 die untere Grenze des Ablehnungsbereichs.		4	
b3) Beträgt der Anteil der zufriedenen Abonnenten beispielsweise $61\,\%$, dann trifft die Nullhypothese nicht zu und die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Fehlers zweiter Art beträgt $P_{0{,}61}^{200}(Z \leq 131) \approx 91{,}7\,\%$.			4
Summe der Bewertungseinheiten	5	12	8

Aufgabe 6: Stochastik-CAS

Private Haushalte mit mindestens einem Kind im Vorschulalter werden im Folgenden als „junge Haushalte“ bezeichnet.

a) In einer deutschen Großstadt wird bei einer statistischen Erhebung festgestellt, dass $60\,\%$ der jungen Haushalte mit mindestens einem Pkw ausgestattet sind und $8\,\%$ der jungen Haushalte mit mindestens einem Lastenrad. In $14\,\%$ der jungen Haushalte ohne Pkw ist mindestens ein Lastenrad vorhanden.

a1) Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. (4 BE)

a2) Beurteilen Sie für diese Großstadt die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter junger Haushalt mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet ist, ist bei einem jungen Haushalt ohne Pkw mehr als dreimal so groß wie bei einem jungen Haushalt mit mindestens einem Pkw.
(3 BE)

300 junge Haushalte dieser Großstadt werden zufällig ausgewählt.

a3) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- genau 28 dieser Haushalte,
- mehr als 20 und höchstens 30 dieser Haushalte,
- höchstens 20 oder mehr als 30 dieser Haushalte

mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind. (5 BE)

a4) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term

$$1-\sum_{k=201}^{300}\binom{300}{k}\cdot 0{,}6^k\cdot 0{,}4^{300-k}$$

berechnet werden kann. (2 BE)

b) Eine Kita betreut 80 Kinder, von denen zwölf mit dem Lastenrad dorthin gebracht werden. Weisen Sie nach:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zehn zufällig ausgewählten Kindern dieser Kita genau zwei befinden, die mit einem Lastenrad gebracht werden, beträgt etwa $29{,}6\,\%$.
(3 BE)

c) Auf einem Prüfstand wird für einen Reifen eines Lastenrades die Strecke gemessen, die der Reifen gefahren werden kann, bis er unbrauchbar wird. Überschreitet der Reifen dabei eine gewisse Mindeststrecke, so wird er „langlebig“ genannt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Reifen langlebig ist, wird im Folgenden mit p bezeichnet. In einer Stichprobe aus 450 Reifen befinden sich 416 langlebige Reifen.

c1) Geben Sie den Anteil der langlebigen Reifen in der Stichprobe in Prozent an. (1 BE)

c2) Prüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ mit dem Stichprobenergebnis 416 auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ verträglich ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das Stichprobenergebnis im $95\,\%$-Annahmebereich der Hypothese $H\colon p = 0{,}9$ liegt. (4 BE)

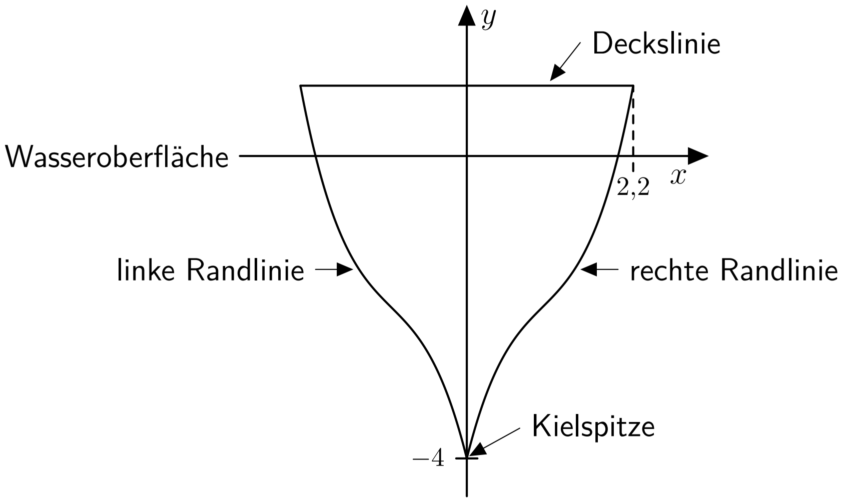
c3) Bestimmen Sie zu dem Stichprobenergebnis näherungsweise die obere Grenze des zugehörigen $95\,\%$-Konfidenzintervalls für den Wert von p. (3 BE)

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a1) A: „Ein junger Haushalt ist mit mindestens einem Pkw ausgestattet.“
B: „Ein junger Haushalt ist mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet.“
<table>
<tr><th></th><th>B</th><th>$\overline{B}$</th><th></th></tr>
<tr><td>A</td><td>0,024</td><td>0,576</td><td>0,6</td></tr>
<tr><td>$\overline{A}$</td><td>0,056</td><td>0,344</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td></td><td>0,08</td><td>0,92</td><td>1</td></tr>
</table></td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>a2) $3 \cdot \frac{0{,}024}{0{,}6} = 0{,}12 < 0{,}14$
Damit ist die zu beurteilende Aussage wahr.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>a3) X: Anzahl der jungen Haushalte, die mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind
$P_{0{,}08}^{300}(X = 28) \approx 6\,\%$
$P_{0{,}08}^{300}(21 \leq X \leq 30) \approx 68\,\%$
$P_{0{,}08}^{300}(X \leq 20) + P_{0{,}08}^{300}(X \geq 31) \approx 32\,\%$</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a4) Höchstens 200 dieser Haushalte sind mit mindestens einem Pkw ausgestattet.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b) $\frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{68}{8}}{\binom{80}{10}} \approx 29{,}6\%$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>c1) $\frac{416}{450} \approx 92{,}4\,\%$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c2) Y: Anzahl der langlebigen Reifen
Die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ ist mit dem Stichprobenergebnis 416 verträglich, wenn $P_{0{,}9}^{450}(Y \leq 415) \geq 0{,}025$ und $P_{0{,}9}^{450}(Y \geq 417) \geq 0{,}025$ gilt. Wegen $P_{0{,}9}^{450}(Y \leq 415) \approx 0{,}955$ und $P_{0{,}9}^{450}(Y \geq 417) \approx 0{,}031$ sind diese Bedingungen erfüllt.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>c3) Näherungsweise gilt:
$\left|\frac{416}{450} - p\right| = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{450}}$
Dies liefert die Lösung $p \approx 0{,}945$ als Obergrenze des $95\,\%$-Konfidenzintervalls.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>Summe der Bewertungseinheiten</td><td>6</td><td>12</td><td>7</td></tr>
</table>

Aufgabe 1: Analysis-WTR

a) Die folgende Abbildung stellt einen achsensymmetrischen Querschnitt des Rumpfes einer Segelyacht vereinfacht in einem Koordinatensystem dar. Die x-Achse beschreibt die Lage der Wasseroberfläche und die y-Achse verläuft entlang der Symmetrieachse.

Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.



Die rechte Randlinie wird mithilfe der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 4$$

für $0 \leq x \leq 2{,}2$ modelliert.

a1) Berechnen Sie die Breite des Querschnitts auf Höhe der Wasseroberfläche und zeigen Sie, dass die Deckslinie ca. $0{,}93\,\mathrm{m}$ über der Wasseroberfläche liegt. (3 BE)

a2) Weisen Sie nach, dass der Graph von f im Intervall $[\,0\,;\,2{,}2\,]$ eine Wendestelle besitzt, und geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes an. (5 BE)

a3) Berechnen Sie die Größe des Winkels, der sich aus der rechten und der linken Randlinie an der Kielspitze im Inneren des Querschnitts ergibt. (4 BE)

a4) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts. (4 BE)

b) Bei der Trainingsfahrt einer Rennyacht wird ihre Geschwindigkeit durch die Funktion v mit

$$v(t) = 20 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}004 \cdot t}\right) \qquad \text{mit} \quad t \geq 0$$

beschrieben. Dabei gibt t die Zeit in Sekunden (s) nach Beginn der Zeitmessung an und $v(t)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$.

b1) Zeigen Sie, dass die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit im Zeitraum von $2\,\mathrm{s}$ bis $10\,\mathrm{s}$ nach Beginn der Zeitmessung ungefähr gleich der momentanen Änderungsrate der Geschwindigkeit $6\,\mathrm{s}$ nach Beginn der Zeitmessung ist. (4 BE)

b2) Begründen Sie anhand des Funktionsterms von v, dass die Geschwindigkeit der Yacht stets kleiner als $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist. (2 BE)

b3) Der Wert des Terms $\displaystyle\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$ gibt die Länge des zurückgelegten Weges in Metern im Zeitraum von 0 bis T Sekunden an.

Geben Sie eine Stammfunktion von v an und bestimmen Sie die Länge des zurückgelegten Weges in Metern in den ersten 300 Sekunden nach Beginn der Zeitmessung. (3 BE)

c) Gegeben ist die Schar der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = x^3 - k\,x^2 + 4\,x - 4 \qquad \text{und} \quad k > 0.$$

Der Graph jeder Funktion f_k wird mit G_k bezeichnet. Jeder Graph G_k verläuft durch den Punkt $P(0\,|\,-4)$. Die Abbildung auf dem Beiblatt zeigt G_3.

c1) Zeigen Sie, dass jeweils zwei verschiedene Graphen G_{k_1} und G_{k_2} nur den Punkt P gemeinsam haben. (3 BE)

c2) Bestimmen Sie alle Werte von k, so dass G_k keine waagerechte Tangente besitzt. (5 BE)

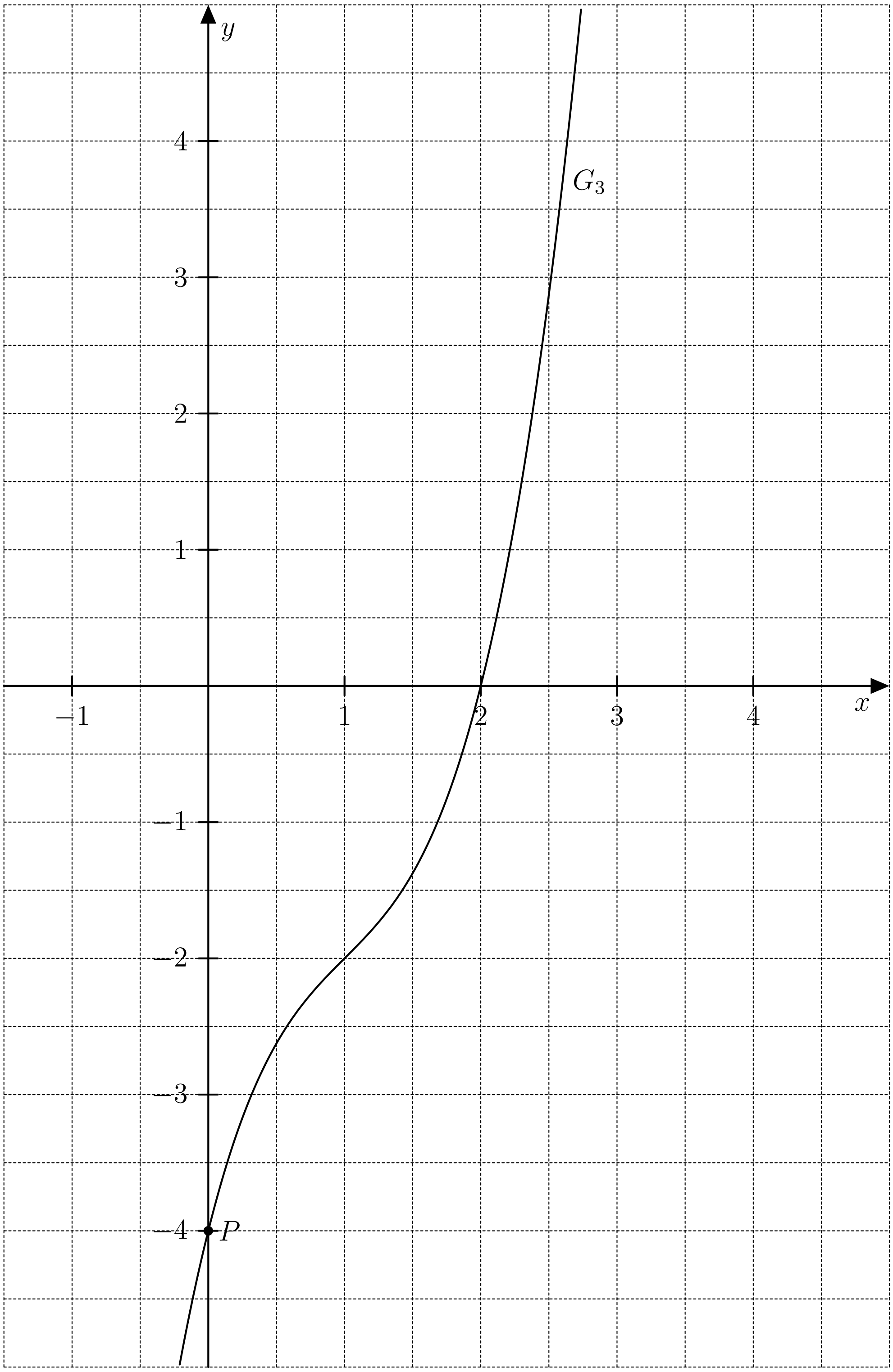
Auf jedem Graphen G_k liegt genau ein von P verschiedener Punkt B_k, so dass die dort angelegte Tangente t_k durch P verläuft.

c3) Zeichnen Sie B_3 und t_3 in die Abbildung ein. (2 BE)

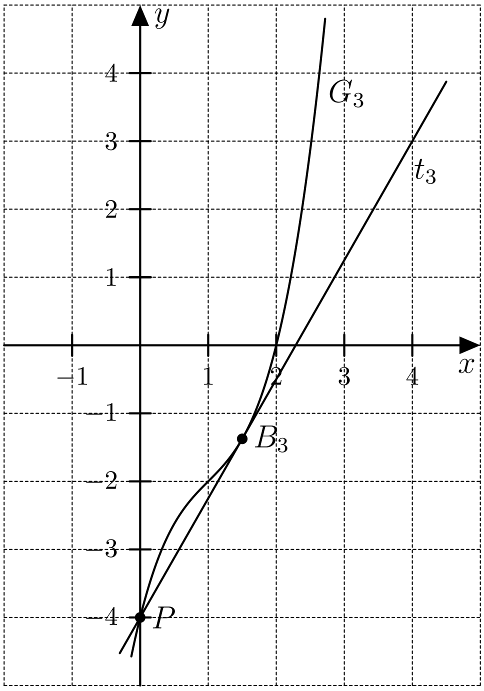
c4) Berechnen Sie die x-Koordinate des Berührpunktes B_k in Abhängigkeit von k. (5 BE)

Beiblatt

zu Aufgabenteil c)



Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ Wegen $2 \cdot 2\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}$ beträgt die Breite $4\,\mathrm{m}$. Mit $f(2{,}2) = 0{,}928$ folgt, dass die Deckslinie ca. $0{,}93\,\mathrm{m}$ über der Wasseroberfläche liegt.	2 1		
a2) $f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x + 4,\ f''(x) = 6\,x - 6,\ f'''(x) = 6$ Wegen $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ und $f'''(1) \neq 0$ ist $x = 1$ eine Wendestelle. Der Wendepunkt hat die Koordinaten $(1 \mid -2)$.	4 1		
a3) Mit $f'(0) = 4$ folgt $\alpha = 2 \cdot (90° - \arctan(4)) \approx 28°$.		4	
a4) $2 \cdot \displaystyle\int_0^{2{,}2} (0{,}93 - f(x))\,\mathrm{d}x \approx 11{,}9$ Der Flächeninhalt des Querschnitts beträgt etwa $11{,}9\,\mathrm{m}^2$.		4	
b1) Gerundet auf beispielsweise drei Nachkommastellen ergibt sich $\frac{v(10)-v(2)}{8} \approx 0{,}078$ und $v'(6) \approx 0{,}078$.	4		
b2) Da $\mathrm{e}^{-0{,}004\,t} > 0$ gilt, folgt $v(t) = 20 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0{,}004\,t}) < 20$.		2	
b3) $V(t) = 20\,t + 5000\,\mathrm{e}^{-0{,}004\,t}$ $\displaystyle\int_0^{300} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 2506$		2 1	
c1) Für $k_1 \neq k_2$ gilt $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \Leftrightarrow k_1 \cdot x^2 = k_2 \cdot x^2 \Leftrightarrow (k_1 - k_2) \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.		3	
c2) $f_k'(x) = 3\,x^2 - 2k\,x + 4$ $f_k'(x) = 0$ liefert $x = \frac{1}{3}k + \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - \frac{4}{3}}$ oder $x = \frac{1}{3}k - \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - \frac{4}{3}}$. Falls $\frac{1}{9}k^2 - \frac{4}{3} < 0$ ist, also für $k < \sqrt{12}$, hat $f_k'(x) = 0$ keine reelle Zahl als Lösung und daher gibt es für $k < \sqrt{12}$ keine waagerechte Tangente an G_k.			3 2

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
c3)  		2	
c4) $f_k(x) = f_k'(x) \cdot x - 4$ $\Leftrightarrow x^3 - k\,x^2 + 4\,x - 4 = (3\,x^2 - 2\,k\,x + 4) \cdot x - 4$ $\Leftrightarrow 0 = 2\,x^3 - k\,x^2 = x^2 \cdot (2\,x - k) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0{,}5\,k$ Für die x-Koordinate von B_k gilt $x = 0{,}5\,k$.			2 3
Summe der Bewertungseinheiten	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis-WTR

[redacted]

Während eines Sommertages werden von 4:00 Uhr morgens bis 18:00 Uhr abends Wetterdaten von einer Messstation aufgenommen.

Eine Messgröße ist die Temperatur der Luft. Die Funktion s mit

$$s(t) = -0{,}03\,t^3 + 0{,}95\,t^2 - 8\,t + 33 \qquad \text{und} \quad 4 \leq t \leq 18$$

beschreibt diese Messergebnisse. Dabei gibt t die vergangene Zeit seit 0:00 Uhr in Stunden (h) an und $s(t)$ die Temperatur in Grad Celsius $(^\circ\mathrm{C})$.
Der Graph von s ist in Abbildung 1 auf dem Beiblatt dargestellt.

a) a1) Bestimmen Sie rechnerisch die maximale und die minimale Temperatur im Messzeitraum. (5 BE)

a2) Außer der maximalen und der minimalen Temperatur gibt es weitere Temperaturen, die bei dieser Messung nur einmal auftreten.
Ermitteln Sie näherungsweise anhand der Abbildung 1 diese Temperaturen und die entsprechenden Uhrzeiten. Zeichnen Sie dazu geeignete Hilfslinien ein. (4 BE)

a3) Berechnen Sie sowohl die größte als auch die kleinste momentane Änderungsrate der Temperatur im Messzeitraum. (5 BE)

a4) Berechnen Sie den Wert des Terms $\dfrac{1}{18-4}\displaystyle\int_4^{18} s(t)\,dt$ und geben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachzusammenhang an. (3 BE)

Luft enthält Wasser im gasförmigen Zustand. Die maximale Masse an Wasser, die in Luft enthalten sein kann, ist abhängig von der Temperatur.
Die Funktion f mit

$$f(x) = 4{,}8 \cdot \mathrm{e}^{0{,}062 \cdot x}$$

beschreibt diesen Zusammenhang. Dabei ist x die Temperatur in Grad Celsius. $f(x)$ gibt in der Einheit Gramm (g) die maximale Masse an Wasser an, die ein Kubikmeter Luft enthalten kann. Die Abbildung 2 auf dem Beiblatt zeigt den Graphen von f.

b) b1) Berechnen Sie $f(10)$ sowie die Stelle x mit $f(x) = 20$. (2 BE)

b2) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt eine Stelle x, an der der Funktionswert von f und die Steigung des Graphen von f gleich groß sind. (5 BE)

b3) Die Funktion f wächst streng monoton.
Interpretieren Sie diese Tatsache im Sachzusammenhang. (2 BE)

c) Die Messstation ermittelt auch die sogenannte relative Luftfeuchtigkeit, die als Prozentsatz $p\,\%$ angegeben wird. Die relative Luftfeuchtigkeit ist der Anteil der Masse an Wasser in der Luft bezogen auf die maximale Masse an Wasser, die in Luft enthalten sein kann.

c1) Für jeden Wert p mit $0 \leq p \leq 100$ beschreibt die Funktion f_p mit

$$f_p(x) = \frac{p}{100} \cdot f(x)$$

den Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Masse an Wasser in der Luft bei einer vorliegenden relativen Luftfeuchtigkeit von $p\,\%$.
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{50} in die Abbildung 2. (3 BE)

c2) Am Tag der Messung liegt um 15 Uhr eine relative Luftfeuchtigkeit von $60\,\%$ vor.
Bestimmen Sie, welche relative Luftfeuchtigkeit um 18 Uhr vorliegt, falls die Masse an Wasser in der Luft unverändert bleibt. (5 BE)

d) Die Messwerte der Temperatur der Luft im Verlauf des nächsten Tages werden mithilfe einer ganzrationalen Funktion $\tilde{s}$ dritten Grades in Abhängigkeit von t beschrieben. Dabei gibt t wieder die Zeit in Stunden seit 0:00 Uhr an und $\tilde{s}(t)$ die Temperatur in Grad Celsius.

Bei der Auswertung der Wetterdaten wird die Verkettung v der Funktionen f und $\tilde{s}$ mit dem Funktionsterm

$$v(t) = f(\tilde{s}(t))$$

betrachtet.

d1) Geben Sie die Bedeutung des Werts $v(12)$ im Sachzusammenhang an. (2 BE)

d2) Im Folgenden werden die Funktionen f, $\tilde{s}$ und v auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet.
Für den Term $v'(t)$ der ersten Ableitungsfunktion von v gilt die Gleichung

$$v'(t) = \tilde{s}'(t) \cdot f'(\tilde{s}(t)).$$

Weiterhin gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Begründen Sie damit die folgende Aussage:

Wenn t_m eine lokale Maximalstelle von $\tilde{s}$ ist, dann ist t_m auch eine lokale Maximalstelle von v. (4 BE)

Beiblatt

Abbildung 1

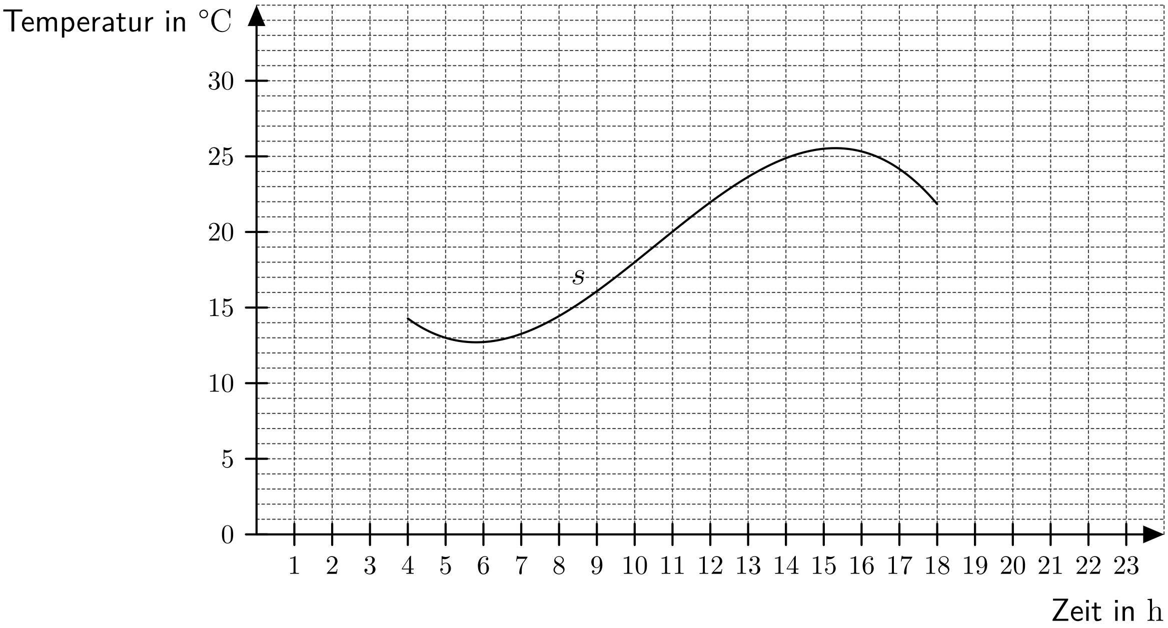
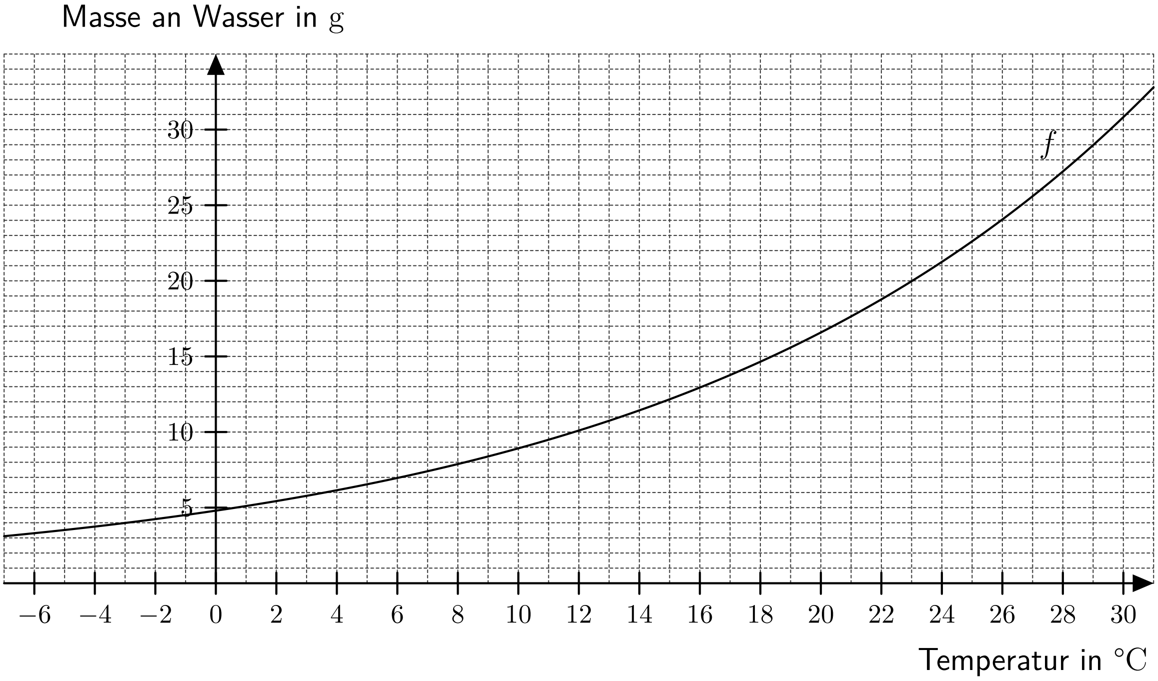
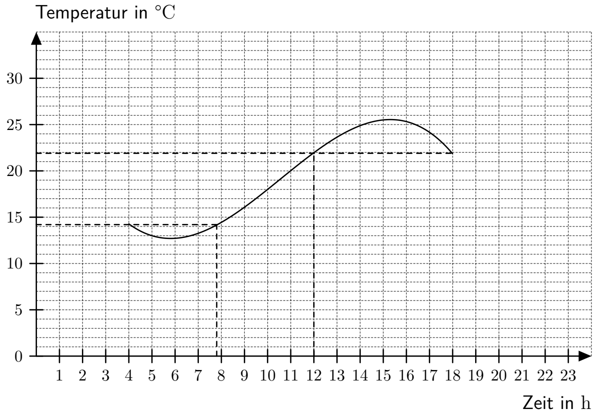
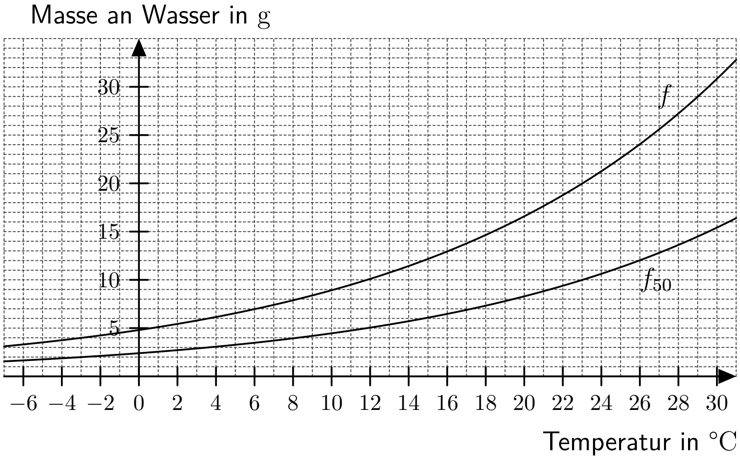


Abbildung 2



Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) $s'(t) = -0{,}09\,t^2 + 1{,}9\,t - 8$ $s'(t) = 0$ liefert $t_1 \approx 5{,}81$ und $t_2 \approx 15{,}30$. Anhand des dargestellten Graphen von s ist ersichtlich, dass dies die globalen Extremstellen sind. Wegen $s(t_1) \approx 12{,}70$ und $s(t_2) \approx 25{,}54$ ist die maximale gemessene Temperatur ca. $25{,}5\,°\mathrm{C}$ und die minimale ca. $12{,}7\,°\mathrm{C}$.	3 2		
a2)  Die Temperaturen zwischen ca. $14\,°\mathrm{C}$ und $22\,°\mathrm{C}$ treten nur einmal auf, und zwar zwischen etwa 8 Uhr und 12 Uhr.	4		
a3) $s''(t) = -0{,}18\,t + 1{,}9$ $s''(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 10{,}\bar{5}$ Wegen $s'(4) = -1{,}84$, $s'(10{,}\bar{5}) \approx 2{,}03$ und $s'(18) = -2{,}96$ ist die größte momentane Änderungsrate ca. $2{,}03\,°\mathrm{C}$ pro Stunde und die kleinste ist $-2{,}96\,°\mathrm{C}$ pro Stunde.		2 3	
a4) $\frac{1}{18-4} \cdot \int_4^{18} s(t)\,dt = \frac{581}{30} = 19{,}3\bar{6}$ Der Term beschreibt den Mittelwert der von 4 Uhr bis 18 Uhr gemessenen Temperaturen in °C.	1	2	
b1) $f(10) \approx 8{,}92$ Aus $f(x) = 20$ folgt $x \approx 23{,}02$.	1 1		
b2) An einer solchen Stelle x würde $f'(x) = f(x)$ gelten. $f'(x) = 0{,}062 \cdot 4{,}8 \cdot \mathrm{e}^{0{,}062\cdot x}$ Wegen $\mathrm{e}^{0{,}062\cdot x} \neq 0$ folgt $0{,}062 \cdot 4{,}8 \cdot \mathrm{e}^{0{,}062\cdot x} = 4{,}8 \cdot \mathrm{e}^{0{,}062\cdot x} \Leftrightarrow 0{,}062 = 1.$ Daher gibt es keine solche Stelle x; die Aussage ist falsch.		2 3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
b3) Je höher die Temperatur ist, desto mehr Wasser kann die Luft maximal enthalten.		2	
c1) 		3	
c2) Wegen $s(15) = 25{,}5$ beträgt die Temperatur um 15 Uhr $25{,}5\,°\mathrm{C}$. Da $60\,\% \cdot f(25{,}5) \approx 14{,}00$ ist, liegen ca. $14\,\mathrm{g}$ Wasser in einem Kubikmeter Luft vor. Wegen $s(18) = 21{,}84$ beträgt die Temperatur um 18 Uhr noch $21{,}84\,°\mathrm{C}$. Der Anteil $p\,\% \approx \dfrac{14}{f(21{,}84)} \approx 0{,}75$ entspricht einer relativen Luftfeuchtigkeit von ca. $75\,\%$.			2 3
d1) Der Wert beschreibt die maximale Masse an Wasser in Gramm, die ein Kubikmeter Luft um 12 Uhr am nächsten Tag enthalten kann.			2
d2) Wenn t_m eine lokale Maximalstelle von $\tilde{s}$ ist, vollzieht $\tilde{s}'$ an der Stelle t_m einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten. Da $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, nimmt $v'(t) = \tilde{s}'(t) \cdot f'(\tilde{s}(t))$ stets dasselbe Vorzeichen an wie $\tilde{s}'(t)$. Also vollzieht v' an der Stelle t_m ebenfalls einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten. *Wird nur $v'(t_m) = 0$ begründet, sollen 2 BE vergeben werden.*			4
Summe der Bewertungseinheiten	12	17	11

Aufgabe 3: Analytische Geometrie-WTR

Abbildung 1 zeigt die Pyramide $ABCDS$ mit den Eckpunkten $A(-3\,|-3\,|\,0)$, $B(3\,|-3\,|\,0)$, $C(3\,|\,3\,|\,0)$, $D(-3|\,3\,|\,0)$ und $S(0\,|\,0\,|\,4)$ sowie den Punkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

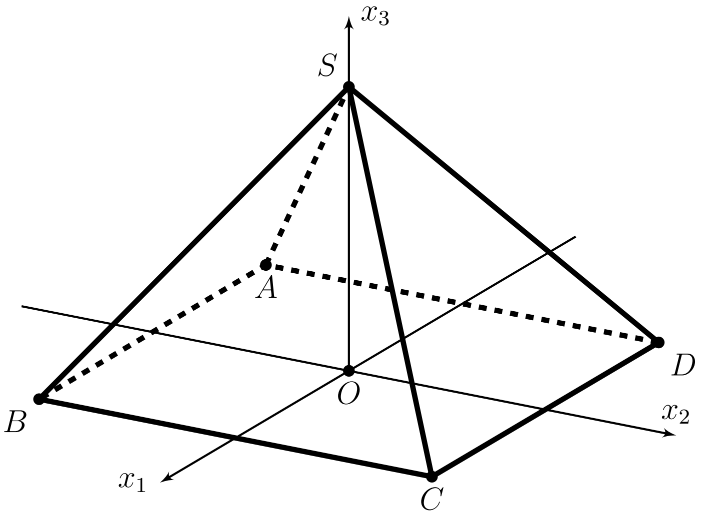


Abbildung 1

a) a1) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. (4 BE)

a2) Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide.
Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x_1 - x_3 = 0$ (2) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ (3) $x_1 + x_2 = 0$ (3 BE)

a3) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (3 BE)

[*zur Kontrolle:* $E: 4\,x_2 + 3\,x_3 = 12$]

a4) Es gibt einen Punkt $P(0\,|\,0\,|\,p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

$$\text{I.}\quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}0\\0\\p\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} \qquad \text{II.}\quad 4\cdot 4\,t + 3\cdot(p+3\,t) = 12 \qquad \text{III.}\quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen. (5 BE)

b) Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen

$$E_k : 4\,k \cdot x_1 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 12 \quad \text{mit } k \in [\,-1\,;\,1\,]\,.$$

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

b1) Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist. (1 BE)

b2) Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist. (4 BE)

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat.
In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

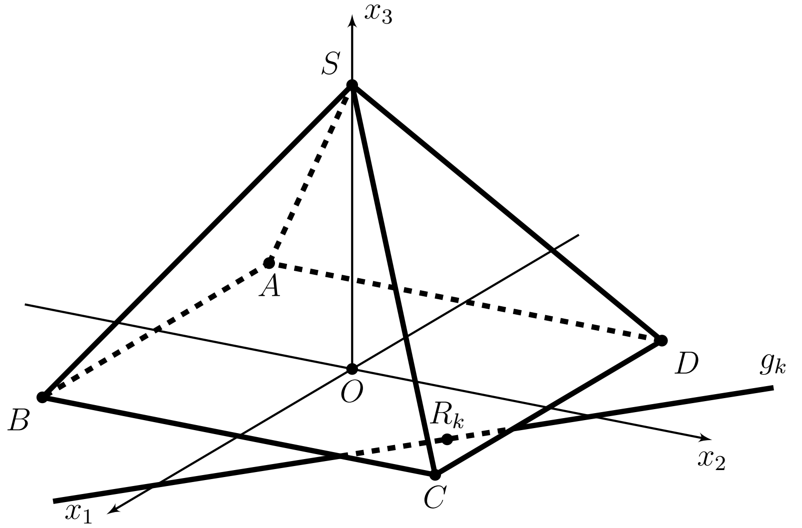
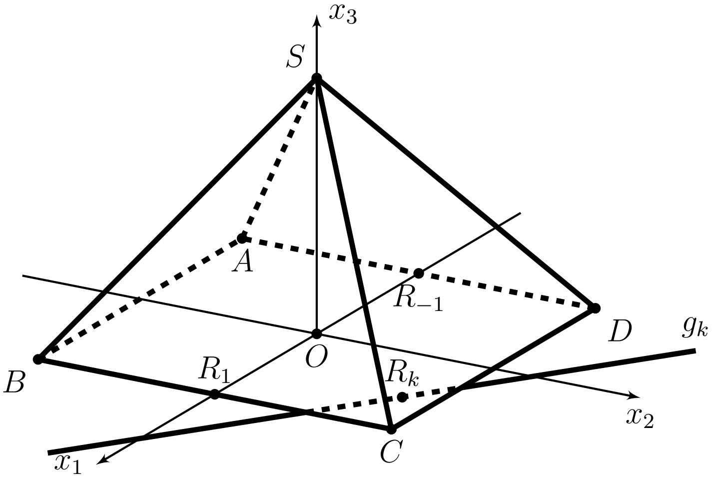


Abbildung 2

b3) Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein. (2 BE)

b4) Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich die Fläche OR_kS um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers. (3 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) Inhalt der Grundfläche: $6 \cdot 6 = 36$ Inhalt einer Seitenfläche: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 15$ Oberflächeninhalt der Pyramide: $36 + 4 \cdot 15 = 96$	1 2 1		
a2) Gleichung (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Die Koordinaten von S erfüllen Gleichung (1) nicht.		1 2	
a3) Mit $\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$ ist $4\,x_2 + 3\,x_3 = 12$ eine Gleichung der Ebene E.		2 1	
a4) Q ist ein Punkt auf der Lotgeraden zu E durch P. Q liegt außerdem in E und ist damit der Schnittpunkt der Lotgeraden mit E. Der Abstand von P zu E stimmt mit dem Abstand p von P zur Grundfläche überein.			3 2
b1) Für alle $k \in [-1; 1]$ gilt $4\,k \cdot 0 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$.	1		
b2) $\dfrac{\begin{pmatrix} 4\,k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\lvert \begin{pmatrix} 4\,k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{3}{\sqrt{16\,k^2 + 16 - 16\,k^2 + 9}} = \dfrac{3}{5}$ Damit ist die Größe des Winkels unabhängig von k.		4	
b3) 		2	
b4) Der Körper hat die Form eines halbierten Kegels. Volumen dieses Körpers: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 3^2) \cdot 4 = 6\,\pi$			1 2
Summe der Bewertungseinheiten	5	12	8

Aufgabe 4: Analytische Geometrie-WTR

An einem Balkon wird ein Solarmodul montiert. In einem geeigneten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den Erdboden. Das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1\,|\,0\,|\,4)$, $B(3\,|\,0\,|\,4)$, $C(3\,|\,0{,}5\,|\,2{,}8)$ und $D(1\,|\,0{,}5\,|\,2{,}8)$ liegt in einer Ebene E und beschreibt die Moduloberseite. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

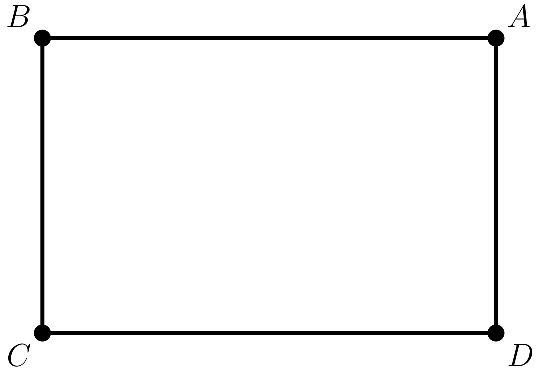
a) a1) Weisen Sie nach, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist. (3 BE)

a2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Moduloberseite und die Länge einer Diagonalen. (4 BE)

a3) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. (3 BE)

[*zur Kontrolle:* $12\,x_2 + 5\,x_3 = 20$]

a4) Jede Gerade, die in der Ebene E liegt und durch das Innere des Rechtecks $ABCD$ verläuft, teilt das Rechteck in genau zwei Vielecke: ein m-Eck und ein n-Eck.
Geben Sie alle möglichen Paare $(m\,,n)$ mit $m \leq n$ an.
Skizzieren Sie für jedes dieser Paare beispielhaft eine Gerade in die folgende Abbildung. (4 BE)



b) Der Punkt $S(-2\,|\,4{,}25\,|\,5{,}4)$ stellt die Spitze eines Fahnenmastes in der Nähe des Balkons dar. Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen in eine Richtung, die durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Die Spitze des Fahnenmastes erzeugt dabei auf der Moduloberseite einen Schattenpunkt, der im Modell durch den Punkt F dargestellt wird.

b1) Berechnen Sie die Koordinaten von F. (4 BE)

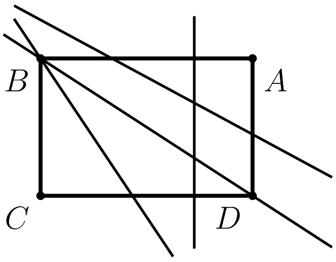
b2) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels der Gerade durch die Punkte S und F mit der Ebene E. (3 BE)

b3) Nun wird die Richtung der Sonnenstrahlen allgemeiner durch den Vektor $\vec{v_k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -(1+k) \\ -k^2 \end{pmatrix}$ mit $k > 0$ beschrieben.
Mit Hilfe eines Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E wird die Funktion f mit

$$f(k) = \frac{|\vec{v_k} \circ \vec{n}|}{|\vec{v_k}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{5\,k^2 + 12\,k + 12}{13 \cdot \sqrt{k^4 + k^2 + 2\,k + 5}} \quad \text{für} \quad k > 0$$

definiert. Die Funktion f hat genau eine Maximalstelle k^*. Es gilt $k^* \approx 1{,}64$.

Berechnen Sie α mit $\sin(\alpha) = f(k^*)$ und $0° < \alpha < 90°$.
Erläutern Sie die Bedeutung von α im Sachzusammenhang. (4 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) Mit $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\-1{,}2\end{pmatrix}=0$ ist $ABCD$ ein Rechteck.	3		
a2) $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert=2\cdot\sqrt{0{,}5^2+(-1{,}2)^2}=2{,}6$ Der Flächeninhalt der Moduloberseite beträgt $2{,}6\,\mathrm{m}^2$. $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=\sqrt{2^2+0{,}5^2+(-1{,}2)^2}\approx 2{,}39$ Die Diagonale ist ca. $2{,}39\,\mathrm{m}$ lang.	2 2		
a3) Wegen $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\-1{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2{,}4\\1\end{pmatrix}$ ist $\vec{n}=5\cdot\begin{pmatrix}0\\2{,}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E. Mit $0\cdot 1+12\cdot 0+5\cdot 4=20$ ergibt sich $12\,x_2+5\,x_3=20$ als Koordinatengleichung von E.		2 1	
a4) Es treten folgende Paare $(m\,,n)$ auf: $(3\,,3)$, $(3\,,4)$, $(3\,,5)$, $(4\,,4)$  			4
b1) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\4{,}25\\5{,}4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $g\cap E:\ \ 12\cdot(4{,}25-2t)+5\cdot(5{,}4-t)=20\ \Leftrightarrow\ t=2$ $\overrightarrow{OF}=\begin{pmatrix}-2\\4{,}25\\5{,}4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0{,}25\\3{,}4\end{pmatrix}$		1 2 1	
b2) Für die Größe des Schnittwinkels α gilt $\sin(\alpha)=\dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\12\\5\end{pmatrix}\right\rvert}=\dfrac{\lvert -24-5\rvert}{3\cdot 13}=\dfrac{29}{39}$ und damit $\alpha\approx 48{,}0^\circ$.		3	
b3) Mit $f(1{,}64)\approx 0{,}814$ und $\sin(\alpha)=f(k^*)$ ergibt sich $\alpha\approx 54{,}5^\circ$. α ist die Größe des maximalen Winkels, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Moduloberseite treffen.			2 2
Summe der Bewertungseinheiten	7	10	8

Aufgabe 5: Stochastik-WTR

Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

a) Unter den Abonnenten sind $70\,\%$ höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben $80\,\%$ das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich $50\,\%$ für das Komplettpaket entschieden.

a1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)

a2) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist. (3 BE)

a3) Unter allen Abonnenten werden 250 zufällig ausgewählt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- weniger als 170 Abonnenten höchstens 40 Jahre alt sind;
- die Anzahl der Abonnenten, die höchstens 40 Jahre alt sind, um maximal 10 von ihrem Erwartungswert abweicht.

(5 BE)

a4) Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $99\,\%$ mehr als fünf Personen älter als 40 Jahre sind. (4 BE)

b) Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit $60\,\%$ soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese „Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens $60\,\%$." mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ getestet werden.

b1) Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte. (2 BE)

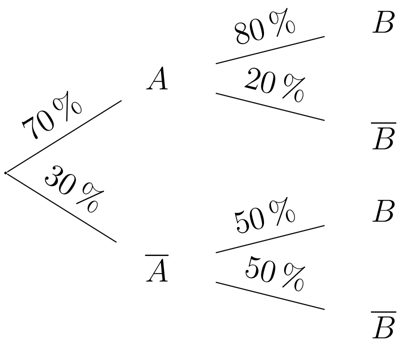
Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132;\,133;\,\ldots;\,200\}$ als Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

b2) Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Z: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Z \geq 132) \approx 0{,}047$

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet. (4 BE)

b3) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als $90\,\%$ betragen könnte. (4 BE)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
a1) A: „Ein Abonnent ist höchstens 40 Jahre alt.“ B: „Ein Abonnent hat das Komplettpaket.“  	3		
a2) $\dfrac{0{,}7\cdot 0{,}8}{0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}5}\approx 79\,\%$		3	
a3) X: Anzahl der Abonnenten, die höchstens 40 Jahre alt sind $P_{0{,}7}^{250}(X<170)=P_{0{,}7}^{250}(X\leq 169)\approx 22\,\%$ $P_{0{,}7}^{250}(250\cdot 0{,}7-10\leq X\leq 250\cdot 0{,}7+10)$ $=P_{0{,}7}^{250}(X\leq 185)-P_{0{,}7}^{250}(X\leq 164)\approx 0{,}9279-0{,}0749\approx 85\,\%$	2	3	
a4) Y: Anzahl der Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind Wegen $P_{0{,}3}^{39}(Y>5)=1-P_{0{,}3}^{39}(Y\leq 5)\approx 98{,}91\,\%$ und $P_{0{,}3}^{40}(Y>5)\approx 99{,}14\,\%$ müssten mindestens 40 Personen zufällig ausgewählt werden.			4
b1) Es soll möglichst vermieden werden, den Algorithmus dauerhaft einzusetzen, obwohl der Einsatz des Algorithmus die Zufriedenheit unter den Abonnenten nicht erhöht. *Alternative Lösungen im Sachkontext sind möglich.*		2	
b2) Es könnte eine natürliche Zahl k mit $k<132$ geben, für die $P_{0{,}6}^{200}(Z\geq k)\leq 0{,}05$ gilt. Mit $P_{0{,}6}^{200}(Z\geq 131)=1-P_{0{,}6}^{200}(Z\leq 130)\approx 0{,}064$ ist 132 die untere Grenze des Ablehnungsbereichs.		4	
b3) Beträgt der Anteil der zufriedenen Abonnenten beispielsweise $61\,\%$, dann trifft die Nullhypothese nicht zu und die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Fehlers zweiter Art beträgt $P_{0{,}61}^{200}(Z\leq 131)\approx 91{,}7\,\%$.			4
Summe der Bewertungseinheiten	5	12	8

Aufgabe 6: Stochastik-WTR

Private Haushalte mit mindestens einem Kind im Vorschulalter werden im Folgenden als „junge Haushalte“ bezeichnet.

a) In einer deutschen Großstadt wird bei einer statistischen Erhebung festgestellt, dass $60\,\%$ der jungen Haushalte mit mindestens einem Pkw ausgestattet sind und $8\,\%$ der jungen Haushalte mit mindestens einem Lastenrad. In $14\,\%$ der jungen Haushalte ohne Pkw ist mindestens ein Lastenrad vorhanden.

a1) Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. (4 BE)

a2) Beurteilen Sie für diese Großstadt die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter junger Haushalt mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet ist, ist bei einem jungen Haushalt ohne Pkw mehr als dreimal so groß wie bei einem jungen Haushalt mit mindestens einem Pkw.
(3 BE)

300 junge Haushalte dieser Großstadt werden zufällig ausgewählt.

a3) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- genau 28 dieser Haushalte,
- mehr als 20 und höchstens 30 dieser Haushalte

mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind. (4 BE)

a4) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term

$$1 - \sum_{k=201}^{300} \binom{300}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{300-k}$$

berechnet werden kann. (2 BE)

b) Eine Kita betreut 80 Kinder, von denen zwölf mit dem Lastenrad dorthin gebracht werden. Weisen Sie nach:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zehn zufällig ausgewählten Kindern dieser Kita genau zwei befinden, die mit einem Lastenrad gebracht werden, beträgt etwa $29{,}6\,\%$.
(3 BE)

c) Auf einem Prüfstand wird für einen Reifen eines Lastenrades die Strecke gemessen, die der Reifen gefahren werden kann, bis er unbrauchbar wird. Überschreitet der Reifen dabei eine gewisse Mindeststrecke, so wird er „langlebig“ genannt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Reifen langlebig ist, wird im Folgenden mit p bezeichnet. In einer Stichprobe aus 450 Reifen befinden sich 416 langlebige Reifen.

c1) Geben Sie den Anteil der langlebigen Reifen in der Stichprobe in Prozent an. (1 BE)

c2) Prüfen Sie, ob die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ mit dem Stichprobenergebnis 416 auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ verträglich ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das Stichprobenergebnis im $95\,\%$-Annahmebereich der Hypothese $H\colon p = 0{,}9$ liegt. (4 BE)

c3) Bestimmen Sie zu dem Stichprobenergebnis näherungsweise die obere Grenze des zugehörigen $95\,\%$-Konfidenzintervalls für den Wert von p. (4 BE)

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a1) A: „Ein junger Haushalt ist mit mindestens einem Pkw ausgestattet.“
B: „Ein junger Haushalt ist mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet.“
<table><tr><td></td><td>B</td><td>$\overline{B}$</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td>0,024</td><td>0,576</td><td>0,6</td></tr><tr><td>$\overline{A}$</td><td>0,056</td><td>0,344</td><td>0,4</td></tr><tr><td></td><td>0,08</td><td>0,92</td><td>1</td></tr></table></td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>a2) $3 \cdot \frac{0{,}024}{0{,}6} = 0{,}12 < 0{,}14$
Damit ist die zu beurteilende Aussage wahr.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>a3) X: Anzahl der jungen Haushalte, die mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind
$P_{0{,}08}^{300}(X = 28) \approx 6\,\%$
$P_{0{,}08}^{300}(20 < X \leq 30) = P_{0{,}08}^{300}(X \leq 30) - P_{0{,}08}^{300}(X \leq 20) \approx 68\,\%$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a4) Höchstens 200 dieser Haushalte sind mit mindestens einem Pkw ausgestattet.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b) $\frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{68}{8}}{\binom{80}{10}} \approx 29{,}6\,\%$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>c1) $\frac{416}{450} \approx 92{,}4\,\%$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c2) Y: Anzahl der langlebigen Reifen
Die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}9$ ist mit dem Stichprobenergebnis 416 verträglich, wenn $P_{0{,}9}^{450}(Y \leq 415) \geq 0{,}025$ und $P_{0{,}9}^{450}(Y \geq 417) \geq 0{,}025$ gilt.
Wegen $P_{0{,}9}^{450}(Y \leq 415) \approx 0{,}955$ und
$1 - P_{0{,}9}^{450}(Y \leq 416) \approx 1 - 0{,}969 = 0{,}031$ sind diese Bedingungen erfüllt.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>c3) Näherungsweise gilt:
$\left|\frac{416}{450} - p\right| = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{450}}$
Für $p > \frac{416}{450}$ liefert dies die Lösung $p \approx 0{,}945$ als Obergrenze des $95\,\%$-Konfidenzintervalls.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Summe der Bewertungseinheiten</td><td>5</td><td>12</td><td>8</td></tr>
</table>