HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,4)$, $B(2\,|\,2\,|\,2)$ und $C(0\,|\,3\,|\,1)$.

1.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D, so dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm mit einer Beschriftung der Eckpunkte im üblichen Umlaufsinn ist.

(2 P)

1.2 Zeigen Sie, dass der Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ bei Punkt B ein rechter Winkel ist.

(2 P)

1.3 Überprüfen Sie, ob es sich bei dem Viereck $ABCD$ um ein Quadrat handelt.

(1 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)
1.1	$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ D hat damit die Koordinaten $(-2\,|\,1\,|\,3)$. 2 P
1.2	Wegen $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = 4-2-2=0$ ist der Innenwinkel bei Eckpunkt B ein rechter Winkel. 2 P
1.3	Wegen $\lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{12} \neq \sqrt{6} = \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ ist das Viereck $ABCD$ kein Quadrat. 1 P

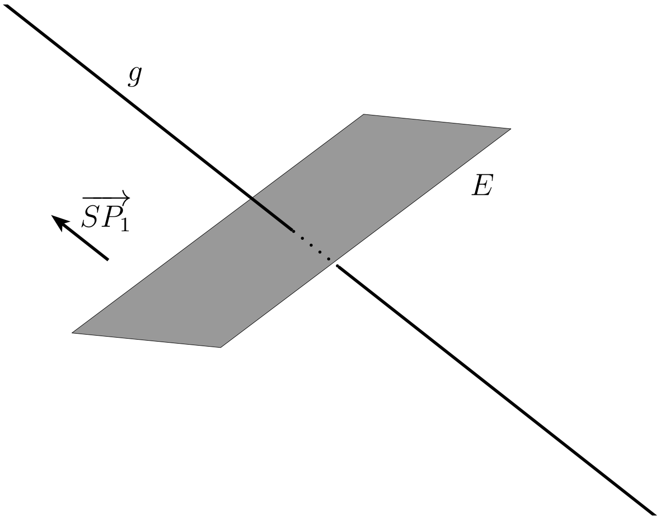
HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E:\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$ schneiden sich im Punkt S.

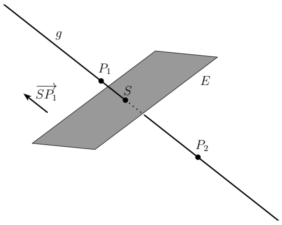
2.1 Berechnen Sie die Koordinaten von S.

(3 P)

2.2 Der Punkt P_1 liegt auf g, aber nicht in E.
Die Abbildung zeigt die Ebene E, die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$.
Für den Punkt P_2 gilt $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet.
Zeichnen Sie die Punkte S, P_1 und P_2 in die Abbildung ein.



(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)
2.1	$2r + 2 \cdot (2+4r) - 2r = 2 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$, d.h. $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ und $S(-\frac{1}{2}\,\vert\,1\,\vert\,-\frac{1}{4})$ 3 P
2.2	 2 P

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 2)

3.1 Die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.
Bestimmen Sie diese Koordinaten.

(2 P)

3.2 Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:

> *„Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.“*

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 2)
3.1	Mit $x_1 = x_2 = x_3 = a$ ergibt sich $3a + 2a + 2a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{7}$. 2 P
3.2	Alle Punkte, deren drei Koordinaten übereinstimmen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Es gibt unendlich viele Ebenen, die parallel zu dieser Geraden sind und die Gerade nicht enthalten. 3 P

HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“, die anderen beiden Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

4.1 Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden.

(2 P)

4.2 Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)
4.1	$\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$ 2 P
4.2	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$ 3 P

HMF 5 - Stochastik (Pool 1)

In einem Fitness-Studio wurde eine Umfrage unter den weiblichen und männlichen Kunden durchgeführt, ob sie mit der Sauberkeit der Umkleideräume zufrieden sind.
Unter allen abgegebenen Fragebögen wird ein Bogen zufällig ausgewählt.
In der folgenden Vierfeldertafel sind einige Wahrscheinlichkeiten bereits eingetragen.
Dabei sind M: „Die Person ist männlich.“ und Z: „Die Person ist mit der Sauberkeit zufrieden.“

	M	$\overline{M}$	
Z			$\frac{9}{16}$
$\overline{Z}$		$\frac{1}{4}$	
		$\frac{3}{8}$	1

5.1 Ergänzen Sie die übrigen Einträge der Vierfeldertafel.

(2 P)

5.2 Beschreiben Sie die Bedeutung des grau hinterlegten Feldes im Sachzusammenhang.

(1 P)

5.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Frau mit der Sauberkeit der Umkleideräume nicht zufrieden ist.

(2 P)

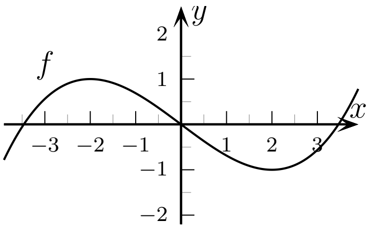
<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Stochastik (Pool 1)</th></tr>
<tr><td>5.1</td><td>

	M	$\overline{M}$	
Z	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$
$\overline{Z}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$
	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

2 P</td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>Im grau hinterlegten Feld ist die Wahrscheinlichkeit dafür angegeben, dass der zufällig ausgewählte Fragebogen zu einer Person gehört, die sowohl weiblich als auch mit der Sauberkeit der Umkleideräume unzufrieden ist. 1 P</td></tr>
<tr><td>5.3</td><td>$P_{\overline{M}}\left(\overline{Z}\right) = \frac{P\left(\overline{M}\cap\overline{Z}\right)}{P\left(\overline{M}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$
2 P</td></tr>
</table>

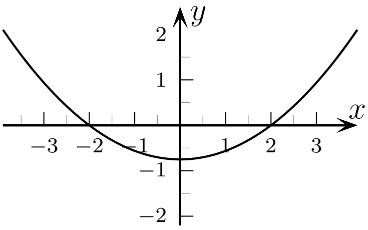
HMF 6 - Analysis (Pool 1)

Der abgebildete Graph stellt eine Funktion f dar.

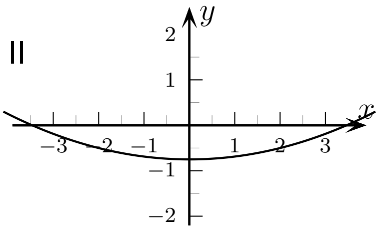


6.1 Einer der folgenden Graphen I, II oder III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.

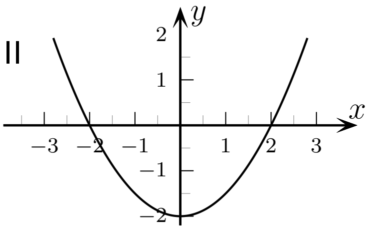
I



II



III



(3 P)

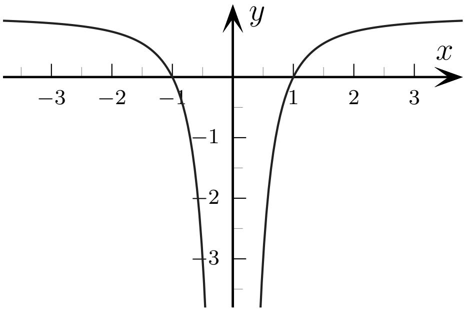
6.2 Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1\,;\,3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 1)
6.1	Graph I Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $\big(0\,\vert\,f(0)\big)$ nicht kleiner als -1 ist. 3 P
6.2	Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) \leq 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton fallend. *Alternative Lösung:* *Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) < 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall streng monoton fallend.* 2 P

HMF 7 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen -1 und 1 hat.
Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.



Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

7.1 Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

(1 P)

7.2 Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

(4 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analysis (Pool 1)
7.1	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - 4 = -3$ 1 P
7.2	$1 \cdot 3 + 2 \cdot \left\lvert \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert = 3 + 2 \cdot \left\lvert \left[x + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right\rvert = 3 + 2 \cdot \left\lvert 2 - \frac{5}{2} \right\rvert = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$ 4 P

HMF 8 - Analysis (Pool 2)

Für jede reelle Zahl a ist die Funktion f_a durch $f_a(x) = x^2 + a \cdot (3 - 4\,x) + a^2$ gegeben.

8.1 Sei zunächst $a = 1$. Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f_1.

(2 P)

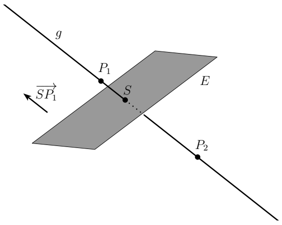
8.2 Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(1\,|\,\frac{3}{4})$ Tiefpunkt des Graphen einer der Funktionen f_a ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analysis (Pool 2)
8.1	$f_1(x) = 0$ $\Leftrightarrow\ x^2 + 1 \cdot (3 - 4\,x) + 1^2 = 0$ $\Leftrightarrow\ x^2 - 4\,x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow\ (x - 2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow\ x = 2$ Damit ist die Stelle 2 die einzige Nullstelle der Funktion f_1. 2 P
8.2	$f_a'(x) = 2x - 4\,a$ $f_a'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\,a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ $f_{\frac{1}{2}}(1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (3 - 4 \cdot 1) + (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $f_{\frac{1}{2}}'(x) = 2\,x - 2$ $f_{\frac{1}{2}}''(x) = 2 > 0$ für alle x Damit ist $(1\,|\,\frac{3}{4})$ Tiefpunkt des Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$. 3 P

HMF-Bewertungsbogen für: ______________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)
1.1	$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ D hat damit die Koordinaten $(-2\,\|\,1\,\|\,3)$. 2 P
1.2	Wegen $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$ ist der Innenwinkel bei Eckpunkt B ein rechter Winkel. 2 P
1.3	Wegen $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{12} \neq \sqrt{6} = \|\overrightarrow{BC}\|$ ist das Viereck $ABCD$ kein Quadrat. 1 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)
2.1	$2r + 2 \cdot (2 + 4r) - 2r = 2 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$, d.h. $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ und $S(-\frac{1}{2}\,\|\,1\,\|\,-\frac{1}{4})$ 3 P
2.2	 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 2)
3.1	Mit $x_1 = x_2 = x_3 = a$ ergibt sich $3a + 2a + 2a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{7}$. 2 P
3.2	Alle Punkte, deren drei Koordinaten übereinstimmen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Es gibt unendlich viele Ebenen, die parallel zu dieser Geraden sind und die Gerade nicht enthalten. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)
4.1	$\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$ 2 P
4.2	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$ 3 P

<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Stochastik (Pool 1)</th></tr>
<tr><td>5.1</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>M</td><td>$\overline{M}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Z</td><td>$\frac{7}{16}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td><td>$\frac{9}{16}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{Z}$</td><td>$\frac{3}{16}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{7}{16}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{5}{8}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>1</td></tr>
</table>
2 P</td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>Im grau hinterlegten Feld ist die Wahrscheinlichkeit dafür angegeben, dass der zufällig ausgewählte Fragebogen zu einer Person gehört, die sowohl weiblich als auch mit der Sauberkeit der Umkleideräume unzufrieden ist. 1 P</td></tr>
<tr><td>5.3</td><td>$P_{\overline{M}}\left(\overline{Z}\right) = \frac{P\left(\overline{M} \cap \overline{Z}\right)}{P\left(\overline{M}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$
2 P</td></tr>
</table>

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 1)
6.1	Graph I Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $\left(0 \,\middle|\, f(0)\right)$ nicht kleiner als -1 ist. 3 P
6.2	Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) \leq 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton fallend. *Alternative Lösung:* *Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) < 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall streng monoton fallend.* 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analysis (Pool 1)
7.1	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - 4 = -3$ 1 P
7.2	$1 \cdot 3 + 2 \cdot \left\| \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \right\| = 3 + 2 \cdot \left\| \left[x + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right\| = 3 + 2 \cdot \left\|2 - \frac{5}{2}\right\| = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$ 4 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analysis (Pool 2)
8.1	$f_1(x) = 0$ $\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \cdot (3 - 4\,x) + 1^2 = 0$ $\Leftrightarrow \quad x^2 - 4\,x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \quad x = 2$ Damit ist die Stelle 2 die einzige Nullstelle der Funktion f_1. 2 P
8.2	$f_a'(x) = 2x - 4\,a$ $f_a'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\,a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ $f_{\frac{1}{2}}(1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (3 - 4 \cdot 1) + (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $f_{\frac{1}{2}}'(x) = 2\,x - 2$ $f_{\frac{1}{2}}''(x) = 2 > 0$ für alle x Damit ist $(1 \mid \frac{3}{4})$ Tiefpunkt des Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$. 3 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Aufgabe 1: Analysis

Zwischen zwei Orten A und B befindet sich ein Tal mit einem tiefsten Punkt T. Der Querschnitt des Tals kann durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades beschrieben werden, wobei $f(x)$ die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern angibt. Im dargestellten Koordinatensystem entspricht eine Einheit einem Kilometer in der Wirklichkeit. Die Orte A und B sowie der Tiefpunkt T haben die Koordinaten $A(0 \mid 0{,}2)$, $B(1 \mid 0{,}3)$ und $T(0{,}5 \mid 0{,}13)$ (vgl. Abb. 1).

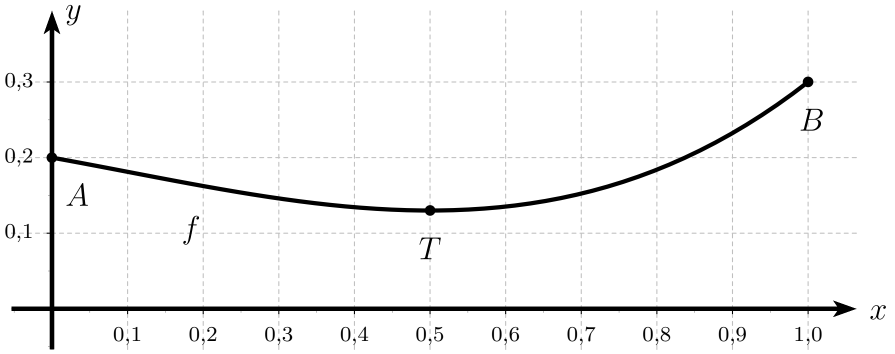


Abb. 1

Der Graph der Funktion f ist zusätzlich auf dem Beiblatt (Abb. 2) vergrößert dargestellt.

a) a1) Leiten Sie eine Gleichung der Funktion f her. (5 P)

Verwenden Sie im Folgenden $f(x) = 0{,}4\,x^3 - 0{,}12\,x^2 - 0{,}18\,x + 0{,}2$.

a2) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Querschnitt des Tals eine Höhe von $240\,\mathrm{m}$ über dem Meeresspiegel aufweist, und bestimmen Sie die Steigung an dieser Stelle. (2 P)

a3) Eine Person wandert von A nach T. Bestimmen Sie das durchschnittliche und das maximale Gefälle auf diesem Weg. (7 P)

Als Touristenattraktion soll zwischen den Punkten A und B eine Hängebrücke errichtet werden. Der Verlauf der Hängebrücke kann durch den Graphen einer Funktion g mit

$$g(x) = 0{,}2\,x^2 - 0{,}1\,x + 0{,}2$$

beschrieben werden.

b) b1) Ergänzen Sie die auf dem Beiblatt abgedruckte Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen auf das Beiblatt. (4 P)

b2) Berechnen Sie den Winkel α zwischen dem Verlauf der Hängebrücke und dem Querschnitt des Tals im Punkt B. (3 P)

c) c1) Es gibt Punkte auf der Hängebrücke, deren Höhe über dem Boden $50\,\mathrm{m}$ beträgt. Zeichnen Sie diese Punkte auf dem Beiblatt ein. (2 P)

c2) Ermitteln Sie rechnerisch die größte Höhe der Hängebrücke über dem Boden. (5 P)

Die Länge L des Graphen der Funktion g über dem Intervall $[a; b]$ kann durch

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx$$

berechnet werden.

c3) Berechnen Sie die Länge der Hängebrücke. (2 P)

c4) Begründen Sie, dass $\int\limits_0^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx > \sqrt{b^2 + (g(b) - g(0))^2}$ für alle $0 < b \leq 1$ gilt. (3 P)

d) Auch die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ kann zur Beschreibung von Hängebrücken verwendet werden.

Es gilt $h''(x) = h(x)$.

d1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $(h(x))^2 - (h'(x))^2 = 1$ gilt. (4 P)

d2) Leiten Sie her, dass $\int\limits_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2}\, dx = h'(b) - h'(a)$ ist. (3 P)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$g(x)$		0,192								0,272	

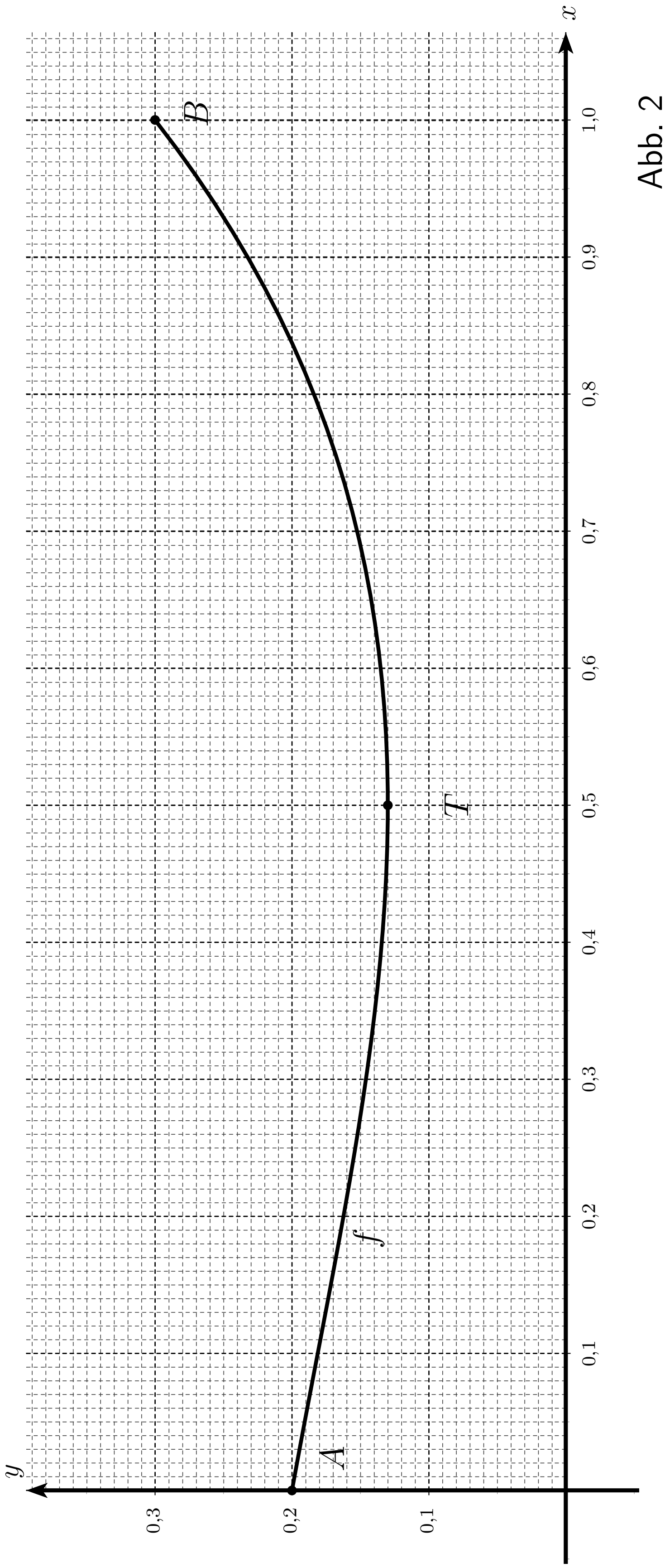


Abb. 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe a)

Eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ folgt

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = 0{,}2 \\ f(1) = 0{,}3 \\ f(0{,}5) = 0{,}13 \\ f'(0{,}5) = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} d = 0{,}2 \\ a + b + c + d = 0{,}3 \\ 0{,}125\,a + 0{,}25\,b + 0{,}5\,c + d = 0{,}13 \\ 0{,}75\,a + b + c = 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} d = 0{,}2 \\ a + b + c = 0{,}1 \\ 0{,}125\,a + 0{,}25\,b + 0{,}5\,c = -0{,}07 \\ 0{,}75\,a + b + c = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 0{,}4 \\ b = -0{,}12 \\ c = -0{,}18 \\ d = 0{,}2 \end{array} \right|.$$

Eine Gleichung der Funktion f lautet $f(x) = 0{,}4x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}18x + 0{,}2$.

</td><td>3
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Der Ansatz $f(x) = 0{,}24 \Leftrightarrow 0{,}4x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}18x + 0{,}2 = 0{,}24$ liefert $x \approx 0{,}9129$. Dies ist die Stelle, an der der Querschnitt des Tals eine Höhe von $240\,\mathrm{m}$ über dem Meeresspiegel aufweist.
Wegen $f'(0{,}9129) \approx 0{,}601$ beträgt die Steigung dort ca. $60{,}1\,\%$.

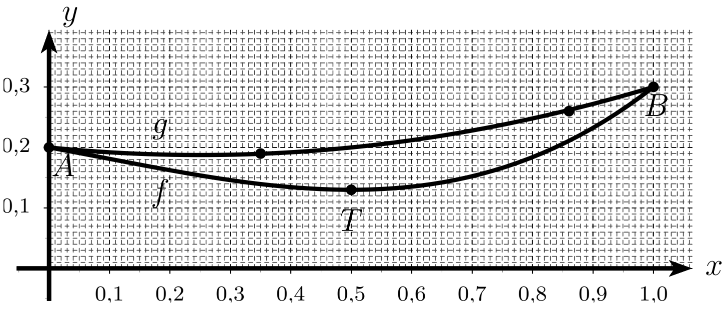
</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Wegen $\frac{f(0{,}5)-f(0)}{0{,}5-0} = \frac{-0{,}07}{0{,}5} = -0{,}14$ ist das durchschnittliche Gefälle $14\,\%$.
Zu ermitteln ist das globale Minimum von f' im Intervall $[0; 0{,}5]$.
Es gilt $f'(x) = 1{,}2\,x^2 - 0{,}24\,x - 0{,}18$ und $f''(x) = 2{,}4\,x - 0{,}24$.
Notwendig für eine lokale Extremstelle x von f' ist $f''(x) = 0$.
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1{,}2\,x - 0{,}24 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}1$
Da zusätzlich $f'(0) = -0{,}18$, $f'(0{,}1) = -0{,}192$ und $f'(0{,}5) = 0$ gilt, beträgt das größte Gefälle auf dem Weg von A nach T $19{,}2\,\%$.

</td><td>1</td><td>4
2</td><td></td></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe b)

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>0,6</td><td>0,7</td><td>0,8</td><td>0,9</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>0,2</td><td>0,192</td><td>0,188</td><td>0,188</td><td>0,192</td><td>0,2</td><td>0,212</td><td>0,228</td><td>0,248</td><td>0,272</td><td>0,3</td></tr>
</table>



</td><td>2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Aus $\tan(\alpha_2) = f'(1) = 0{,}78$ folgt $\alpha_2 \approx 37{,}95°$.
Aus $\tan(\alpha_1) = g'(1) = 0{,}3$ folgt $\alpha_1 \approx 16{,}70°$.
Wegen $\alpha_2 - \alpha_1 \approx 21{,}25°$ beträgt der Winkel zwischen dem Verlauf der Hängebrücke und dem Querschnittsverlauf ungefähr $21{,}25°$.

</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Einzeichnen der beiden Punkte auf dem Beiblatt, vgl. b1).		2	
Zu ermitteln ist das globale Maximum der Differenzfunktion d mit $d(x)=g(x)-f(x)=-0{,}4\,x^3+0{,}32\,x^2+0{,}08\,x$ im Intervall $[0;1]$. Notwendig für eine lokale Extremstelle x von d ist $d'(x)=0$. Es ist $d'(x)=-1{,}2\,x^2+0{,}64\,x+0{,}08$. $d'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; -1{,}2\,x^2+0{,}64\,x+0{,}08=0$ Damit ergibt sich $x\approx-0{,}105 \vee x\approx 0{,}638$. Da zusätzlich $d(0)=0$, $d(0{,}638)\approx 0{,}077$ und $d(1)=0$ gilt, liegt ungefähr an der Stelle $0{,}638$ ein globales Maximum vor. Demnach beträgt die größte Höhe der Hängebrücke über dem Boden ungefähr $77\,\mathrm{m}$.		2 3	
Wegen $L=\int\limits_0^1 \sqrt{1+(g'(x))^2}\,dx=\int\limits_0^1 \sqrt{1+(0{,}4\,x-0{,}1)^2}\,dx\approx 1{,}012$ ist die Hängebrücke ungefähr $1012\,\mathrm{m}$ lang.		2	
Der Term $\sqrt{b^2+(g(b)-g(0))^2}$ gibt nach dem Satz des Pythagoras die Länge der direkten Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $(0 \mid g(0))$ und $(b \mid g(b))$ an, während der Term $\int_0^b \sqrt{1+(0{,}4\,x-0{,}1)^2}\,dx$ die Länge der Hängebrücke von $(0 \mid g(0))$ bis zum Punkt $(b \mid g(b))$ angibt. Da die Brücke nicht geradlinig verläuft, ist ihre Länge größer als die Länge der direkten Verbindungsstrecke.			3
Teilaufgabe d) Mit $h'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^x+(-1)\cdot e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^x-e^{-x}\right)$ folgt $(h(x))^2-(h'(x))^2=\left(\frac{1}{2}\cdot(e^x+e^{-x})\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot(e^x-e^{-x})\right)^2$ $=\frac{1}{4}\cdot(e^x+e^{-x})^2-\frac{1}{4}\cdot(e^x-e^{-x})^2=\frac{1}{4}\cdot(4\cdot e^x\cdot e^{-x})=\frac{1}{4}\cdot 4\cdot e^0=1$			4
$\int\limits_a^b \sqrt{1+(h'(x))^2}\,dx=\int\limits_a^b \sqrt{(h(x))^2}\,dx=\int\limits_a^b \lvert h(x)\rvert\,dx$ $=\int\limits_a^b h(x)\,dx=\int\limits_a^b h''(x)\,dx=\left[h'(x)\right]_a^b=h'(b)-h'(a)$			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Trinkt man ein koffeinhaltiges Getränk (z.B. Kaffee, Cola, Energydrink), so wird darin enthaltenes Koffein vom Körper ins Blut aufgenommen und dort kontinuierlich wieder abgebaut.

a) Eine Person, in deren Körper kein Koffein enthalten ist, trinkt ein koffeinhaltiges Getränk. Berücksichtigt man sowohl den Aufnahme- als auch den Abbauvorgang, so wird die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration im Blut mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(t) = 0{,}01 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}003 \cdot t} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0{,}07 \cdot t})$ für $t \geq 0$ beschrieben.
Dabei ist $h(t)$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$ und t die Zeit in Minuten, die seit dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs vergangen ist.

a1) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die höchste Koffeinkonzentration erreicht wird, und geben Sie diese Konzentration an. (4 P)

a2) Zeichnen Sie den Graphen von h über dem Intervall $[0\,;\,400]$ in ein Koordinatensystem und wählen Sie hierfür folgenden Maßstab: $5\,\mathrm{cm}$ auf der t-Achse entsprechen $100\,\mathrm{min}$ und $1\,\mathrm{cm}$ auf der y-Achse entspricht $0{,}001\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$. (3 P)

a3) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Zeichnung die größte momentane Abnahmerate der Koffeinkonzentration. (3 P)

a4) Untersuchen Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Koffeinkonzentration maximal ist, und geben Sie das Maximum an. (4 P)

a5) Bestimmen Sie mithilfe einer Rechnung die Zeiträume ab dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs, in denen die Koffeinkonzentration höchstens $0{,}007\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$ beträgt. (3 P)

a6) Berechnen Sie denjenigen Wert von $a \in \mathbb{R}^+$, für den der Inhalt der Fläche, die der Graph von h mit der t-Achse und der Geraden mit der Gleichung $t = a$ einschließt, $0{,}7$ beträgt. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

> *„Der Inhalt der betrachteten Fläche entspricht der Koffeinmenge, die im zugehörigen Zeitraum insgesamt ins Blut aufgenommen wird.“* (4 P)

b) **Untersuchung des Abbauvorgangs**
Zur gesonderten Untersuchung des Abbauvorgangs soll nun davon ausgegangen werden, dass die Aufnahme von Koffein ins Blut bereits abgeschlossen ist und die Konzentration des Koffeins im Blut innerhalb von jeweils 240 Minuten um die Hälfte abnimmt.

b1) Geben Sie die Zeitdauer an, innerhalb derer die Koffeinkonzentration um $75\,\%$ abnimmt. (2 P)

b2) Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(t) = c \cdot \mathrm{e}^{a \cdot t}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$ beschreiben. Dabei ist $f(t)$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$ und t die Zeit in Minuten, die seit Beginn der Beobachtung dieser Konzentration vergangen ist.
Begründen Sie, dass c die Koffeinkonzentration zu Beginn der Beobachtung angibt, und bestimmen Sie den passenden Wert von a. (3 P)

c) **Untersuchung des Aufnahmevorgangs**

Berücksichtigt man nur den Aufnahmevorgang, lässt also den gleichzeitig erfolgenden Abbau von Koffein außer Acht, so kann die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g_{b;k}$ mit $g_{b;k}(t) = k \cdot (1 - \mathrm{e}^{b \cdot t})$ mit $b \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Dabei ist $g_{b;k}(t)$ die Koffeinkonzentration in $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$ und t die Zeit in Minuten, die seit Beginn der Beobachtung dieser Konzentration vergangen ist.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die Blutmenge konstant 5 Liter beträgt und insgesamt $100\,\mathrm{mg}$ Koffein ins Blut aufgenommen werden.

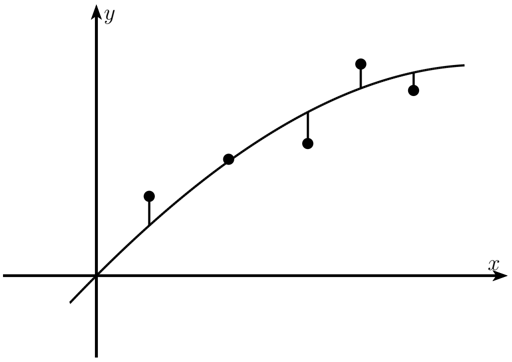
c1) Begründen Sie unter Berücksichtigung des Sachzusammenhangs, dass $b < 0$ gilt. (2 P)

c2) Geben Sie die Bedeutung von k im Sachzusammenhang an und zeigen Sie, dass $k = 0{,}02$ gilt. (2 P)

Der folgenden Tabelle können Koffeinkonzentrationen entnommen werden, die sich aus einer Messung ergeben, wenn man den Abbauvorgang außer Acht lässt:

seit Beginn der Beobachtung vergangene Zeit in Minuten	0	15	30	45
Koffeinkonzentration in $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$	0	$0{,}0127$	$0{,}0173$	$0{,}0190$

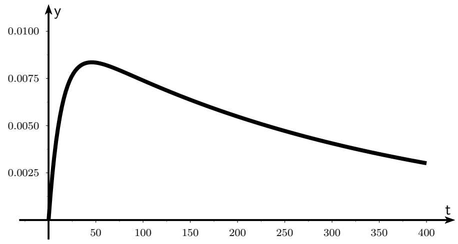
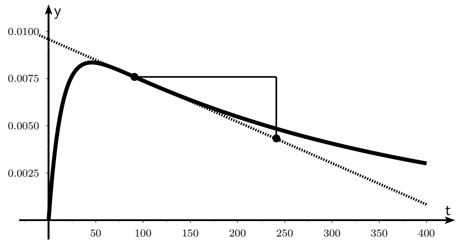
Sollen Messwerte mithilfe einer Funktion eines bestimmten Funktionstyps möglichst gut beschrieben werden, so wird diese Funktion so gewählt, dass die Summe der quadrierten Differenzen der Funktionswerte und der Messwerte möglichst klein ist. In der Abbildung sind Differenzen von Funktionswerten und Messwerten beispielhaft in Form von Strecken veranschaulicht.



c3) Berechnen Sie die Summe der quadrierten Differenzen der Funktionswerte der Funktion $g_{b;k}$ mit $b = -0{,}07$ und $k = 0{,}02$ und der in der Tabelle gegebenen Messwerte. (4 P)

c4) Geben Sie einen Grund dafür an, dass es bei dieser Methode nicht sinnvoll ist, die Differenzen selbst anstelle ihrer Quadrate zu verwenden. (2 P)

c5) Bestimmen Sie b so, dass die angegebenen Messwerte mithilfe der Funktion $g_{b\,;\,0{,}02}$ möglichst gut beschrieben werden. (4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Notwendig für eine lokale Extremstelle t von h ist $h'(t) = 0$. $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 45{,}5978$ Weil zusätzlich $h''(45{,}5978) \approx -0{,}000002 < 0$, $h(0) = 0$ und $h(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ gilt und $h(45{,}5978) \approx 0{,}008363$, ist die Koffeinkonzentration etwa 46 Minuten nach dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs mit etwa $0{,}0084\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$ am höchsten.	4		
verkleinerte Darstellung:  	3		
verkleinerte Darstellung:  $\frac{-0{,}003}{150} = -0{,}00002$ Die Abnahmerate beträgt etwa $0{,}000\,02\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell\cdot\mathrm{min}}$.		3	
Eine notwendige Bedingung für eine lokale Maximalstelle t von h' ist $h''(t) = 0$. $h''(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 91{,}1956$ Weil zusätzlich $h'(0) = 0{,}0007$, $h'(91{,}1956) \approx -0{,}00002$ und $h'(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ gilt, ist die Änderungsrate zum Zeitpunkt des Einsetzens des Aufnahmevorgangs maximal. Sie beträgt $0{,}0007\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell\cdot\mathrm{min}}$.		4	
$h(t) = 0{,}007 \Leftrightarrow t \approx 19{,}3446$ und $t \approx 118{,}8102$ Mithilfe des Graphen ergibt sich, dass die Koffeinkonzentration in den ersten etwa 19 Minuten nach dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs sowie ab einem Zeitpunkt, der etwa 119 Minuten nach dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs liegt, höchstens $0{,}007\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$ beträgt.		3	
Für $a > 0$ liefert $\int\limits_0^a h(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}7$ den Wert $a \approx 96{,}3653$. Die Aussage ist falsch. Eine Flächeneinheit entspricht im Sachzusammenhang $1\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}\cdot\mathrm{min}$, beschreibt also keine Koffeinmenge.		2	2

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) 480 Minuten (Erforderlich sind zwei Zeitspannen à 240 Minuten, in denen die Koffeinkonzentration jeweils halbiert wird.)	2		
Wegen $f(0) = c \cdot \mathrm{e}^{a \cdot 0} = c$ ist c die Koffeinkonzentration zu Beginn der Beobachtung. Für $c > 0$ ergibt sich $f(240) = \frac{1}{2}c \Leftrightarrow a = -\frac{\ln(2)}{240} \approx -0{,}0029$.	1 2		
Teilaufgabe c) Die Aufnahme von Koffein ins Blut führt zu einer Zunahme der Koffeinkonzentration. Die Werte von $g_{b,k}(t) = k - k \cdot \mathrm{e}^{b \cdot t}$ nehmen mit wachsenden Werten von t genau dann zu, wenn $b < 0$ gilt.		2	
k gibt den Wert an, dem sich die Koffeinkonzentration nähert, wenn man den Abbauvorgang außer Acht lässt. Wegen $\frac{100\,\mathrm{mg}}{5000\,\mathrm{m}\ell} = 0{,}02\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{m}\ell}$ ist $k = 0{,}02$.			2
Mit $g(t) = g_{-0{,}07;0{,}02}(t)$ gilt: $(g(0) - 0)^2 + (g(15) - 0{,}0127)^2 + (g(30) - 0{,}0173)^2 + (g(45) - 0{,}0190)^2$ $\approx 1{,}74 \cdot 10^{-7}$		4	
Verwendet man anstelle der Quadrate der Differenzen die Differenzen selbst, so können sich positive und negative Differenzen teilweise gegenseitig aufheben. Damit könnte die Summe der Differenzen trotz großer Beträge gering sein.			2
Zu bestimmen ist das globale Minimum der Funktion q mit $q(b) = (g_{b;0{,}02}(0) - 0)^2 + (g_{b;0{,}02}(15) - 0{,}0127)^2 + (g_{b;0{,}02}(30) - 0{,}0173))^2$ $+(g_{b;0{,}02}(45) - 0{,}0190)^2$. Notwendig für eine lokale Extremstelle b von q ist $q'(b) = 0$. $q'(b) = 0 \Leftrightarrow b \approx -0{,}0670$ Da zusätzlich $q''(-0{,}0670) \approx 0{,}041 > 0$ gilt und keine weiteren Extremstellen existieren, liegt für $b \approx -0{,}0670$ das globale Minimum der Funktion q vor.			4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ hat den Tiefpunkt $(0 \mid 0)$ und den Wendepunkt $(-\frac{1}{2} \mid \frac{5}{4})$.
Runden Sie im Folgenden alle Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

a) a1) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g. (5 P)

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{5}{2}\,x^2 \cdot (2x+3)$]

a2) Erstellen Sie für $-1{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ eine Wertetabelle für die Funktion g mit der Schrittweite $0{,}25$ und zeichnen Sie den Graphen. (4 P)

a3) Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt (die sogenannte Wendetangente). Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet. (3 P)

a4) Zeigen Sie, dass die Wendetangente von g und der Graph von g nur den Wendepunkt gemeinsam haben. (3 P)

b) Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3} \cdot x^3}$.

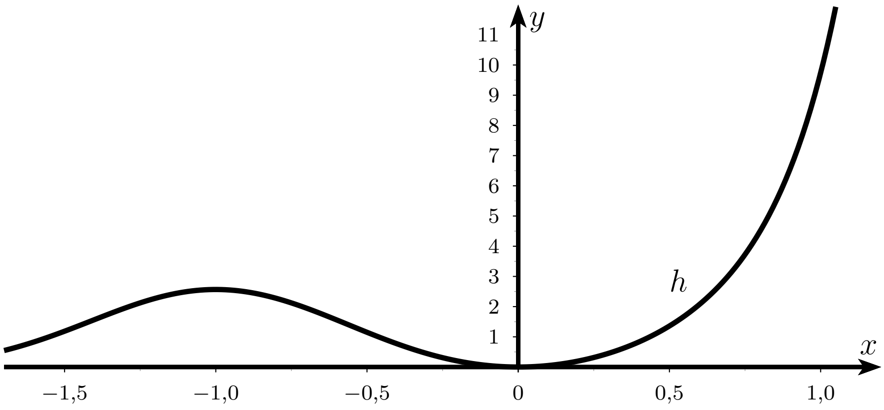


Abbildung 1

b1) Zeigen Sie, dass die Funktion h keine negativen Funktionswerte hat. (2 P)

b2) Zeigen Sie, dass $h'(x) = 10\,x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3} \cdot x^3}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h ist. (2 P)

b3) Die x-Achse ist eine waagerechte Tangente an den Graphen von h.
Weisen Sie nach, dass neben der x-Achse die Gerade t mit $t(x) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}}$ die einzige weitere waagerechte Tangente an den Graphen von h ist. (4 P)

b4) Die Tangente t und der Graph von h haben genau zwei Punkte gemeinsam. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Tangente t und dem Graphen von h vollständig eingeschlossen wird. (4 P)

c) c1) Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1 \leq x \leq 0$. (3 P)

c2) Es gilt $(h(1) - g(1)) \cdot (h(2) - g(2)) < 0$.
Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1 < x < 2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe. (4 P)

d) d1) Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung 1 die folgende Aussage:

> *„Für $-1{,}5 \leq x \leq 1$ ändert sich beim Graphen jeder Stammfunktion von h genau einmal das Krümmungsverhalten.“* (3 P)

d2) Einer der in Abbildung 2 abgebildeten Graphen I, II oder III ist der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion H mit $H(x) = \int\limits_0^x h(t)\,dt$.
Entscheiden Sie, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 P)

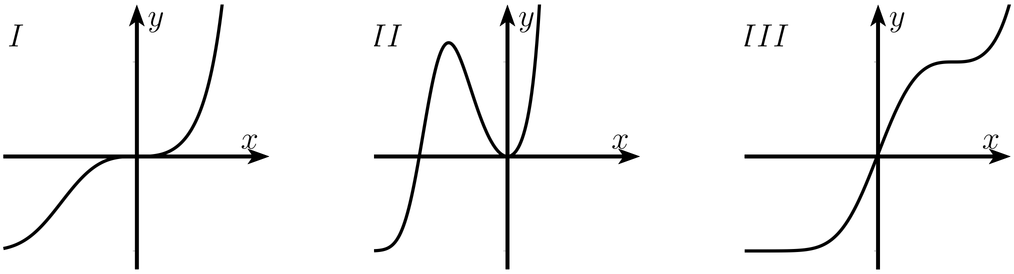


Abbildung 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung
Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe a)
Eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet
$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Mit $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $g''(x) = 6ax + 2b$ folgt:

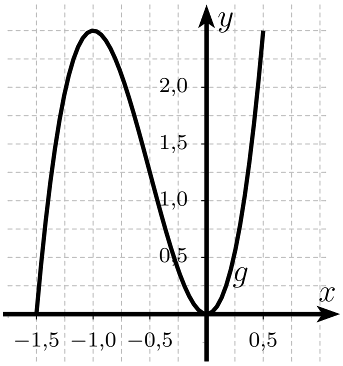
$$\left| \begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g'(0) = 0 \\ g(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \\ g''(-\frac{1}{2}) = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} d = 0 \\ c = 0 \\ -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b = \frac{5}{4} \\ -3a + 2b = 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 5 \\ b = \frac{15}{2} \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array} \right|$$

Ein Funktionsterm von g lautet $g(x) = 5x^3 + \frac{15}{2}x^2$.

</td><td>3
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

<table>
<tr><td>x</td><td>$-1{,}5$</td><td>$-1{,}25$</td><td>-1</td><td>$-0{,}75$</td><td>$-0{,}5$</td><td>$-0{,}25$</td><td>0</td><td>0,25</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>0</td><td>1,95</td><td>2,5</td><td>2,11</td><td>1,25</td><td>0,39</td><td>0</td><td>0,55</td><td>2,5</td></tr>
</table>



</td><td>2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Aus $\tan(\alpha) = g'(-\frac{1}{2}) = -\frac{15}{4}$ folgt $\alpha \approx -75{,}07°$. Die Größe des Winkels beträgt etwa 75°.

</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>

Eine Gleichung der Wendetangente w von g lautet
$w(x) = g'(-\frac{1}{2}) \cdot (x + \frac{1}{2}) + \frac{5}{4} = -\frac{15}{4} \cdot (x + \frac{1}{2}) + \frac{5}{4}$.

$$w(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{15}{4} \cdot (x + \frac{1}{2}) + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}\, x^2 \cdot (2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x^3 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{5}{8} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}$$

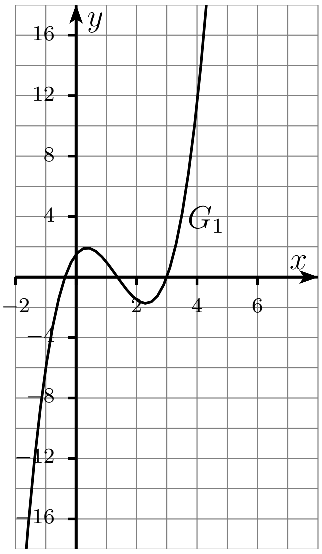
Da die auftretende Gleichung 3. Grades genau eine Lösung hat, haben die Wendetangente von g und der Graph von g nur den Wendepunkt gemeinsam.

</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) Wegen $5\,x^2 \geq 0$ und $e^{\frac{2}{3}\cdot x^3} > 0$ ist $h(x) = 5\,x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^3} \geq 0$. Somit können bei der Funktion h keine negativen Funktionswerte auftreten.	2		
Es gilt $h'(x) = 10\,x \cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^3} + 5\,x^2 \cdot 2x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^3} = 10\,x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^3}$.		2	
$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 10\,x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^3} = 0$ $\Leftrightarrow\; 10\,x = 0 \;\vee\; 1 + x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = -1$. Somit sind -1 und 0 die einzigen Stellen, an denen der Graph von h eine waagerechte Tangente besitzt. Da $h(0) = 0$ und $h(-1) = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}} \neq 0$ gilt, ist neben der x-Achse die Gerade t die einzige weitere waagerechte Tangente an den Graphen von h.		2 2	
Die Gleichung $h(x) = t(x)$ bzw. $5\,x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^3} = 5 \cdot e^{-\frac{2}{3}}$ hat nach Aufgabenstellung genau zwei Lösungen. Diese sind -1 und ungefähr $0{,}65$. $\displaystyle\int_{-1}^{0{,}65} (t(x) - h(x))\;dx = \int_{-1}^{0{,}65} \left(5\,e^{-\frac{2}{3}} - 5\,x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x^3}\right)\,dx \approx 2{,}52$		4	
Teilaufgabe c) $\dfrac{g(0) - g(-1) - (h(0) - h(-1))}{h(0) - h(-1)} \approx \dfrac{-2{,}5 - (-2{,}57)}{-2{,}57} \approx -0{,}03$ Die Abweichung beträgt etwa $3\,\%$.		3	
Da das Produkt negativ ist, haben die beiden Differenzen unterschiedliche Vorzeichen. Damit haben die Graphen von g und h im angegebenen Bereich mindestens einen Schnittpunkt. Die Anzahl der Schnittpunkte ist ungerade.			3 1
Teilaufgabe d) Die Aussage ist falsch. Begründung: Das Krümmungsverhalten des Graphen einer Stammfunktion von h ändert sich an den Extremstellen von h. Die Funktion h hat für $-1{,}5 \leq x \leq 1$ mehr als eine Extremstelle.			3
Es gilt $H'(x) = h(x)$. Da $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $h(0) = 0$ gilt, ist H monoton wachsend. An der Stelle 0 beträgt die Steigung des Graphen von H null. Dies gilt nur für den Graphen I.			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(x) = (x-3)\cdot(x^2 - k\cdot x - \frac{k}{2})$ und $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet. Die Abbildung zeigt G_1.



a) a1) Bestimmen Sie für G_6 die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten der Extrempunkte.
Skizzieren Sie G_6 in der Abbildung. (8 P)

a2) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte, durch die alle Graphen der Schar verlaufen. (4 P)

a3) Zeigen Sie, dass G_k für jeden Wert von k genau zwei Extrempunkte hat. (5 P)

a4) Jeder Graph G_k hat einen Wendepunkt.
Ermitteln Sie alle Werte von k, für die der Wendepunkt von G_k auf einer Koordinatenachse liegt. (4 P)

a5) Für alle Graphen der Schar wird jeweils die Tangente im Wendepunkt betrachtet. Jede dieser Tangenten schließt mit der x-Achse einen Winkel ein.
Bestimmen Sie die Größe des kleinsten dieser Winkel. (5 P)

a6) G_6 schließt für $0 \leq x \leq 3$ ein Flächenstück mit der x-Achse und der Geraden $x = 0$ ein. Für $3 \leq x \leq 6$ schließt G_6 ein zweites Flächenstück mit der x-Achse und der Geraden $x = 6$ ein. Rotieren diese beiden Flächenstücke um die x-Achse, so entstehen zwei Körper.
Bestimmen Sie die Volumina der beiden Körper. (2 P)

a7) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

> *„Rotieren zwei Flächenstücke gleichen Inhalts um die x-Achse, so stimmen die Volumina der beiden entstehenden Körper überein.“*

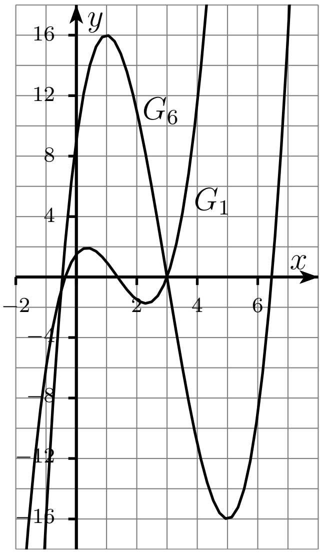
(3 P)

b) Die Funktion f_1 beschreibt nun für $0 \leq x \leq 3$ die momentane Änderungsrate der Wassermenge in einer großen Regentonne. Dabei steht x für die Zeit in Stunden nach Beobachtungsbeginn um 12:00 Uhr und $f_1(x)$ für die momentane Änderungsrate in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$.

b1) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^3 f_1(x)\,\mathrm{d}x$ und interpretieren Sie den Integralwert im Sachzusammenhang. (2 P)

b2) Um 12:15 Uhr enthält die Regentonne $0{,}8\,\mathrm{m}^3$ Wasser.
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge, die sich in der Zeit zwischen 12:00 Uhr und 15:00 Uhr in der Regentonne befindet. (4 P)

c) Betrachtet werden nun zwei zu Beginn der Beobachtung leere Regentonnen T_1 und T_2. Die Funktionen f_{k_1} und f_{k_2} mit $k_1 < k_2$ beschreiben für $0 \leq x \leq 3$ die momentanen Änderungsraten der Wassermenge der Tonne T_1 bzw. T_2.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, für den der Füllmengenunterschied zwischen den beiden Tonnen maximal ist. (3 P)

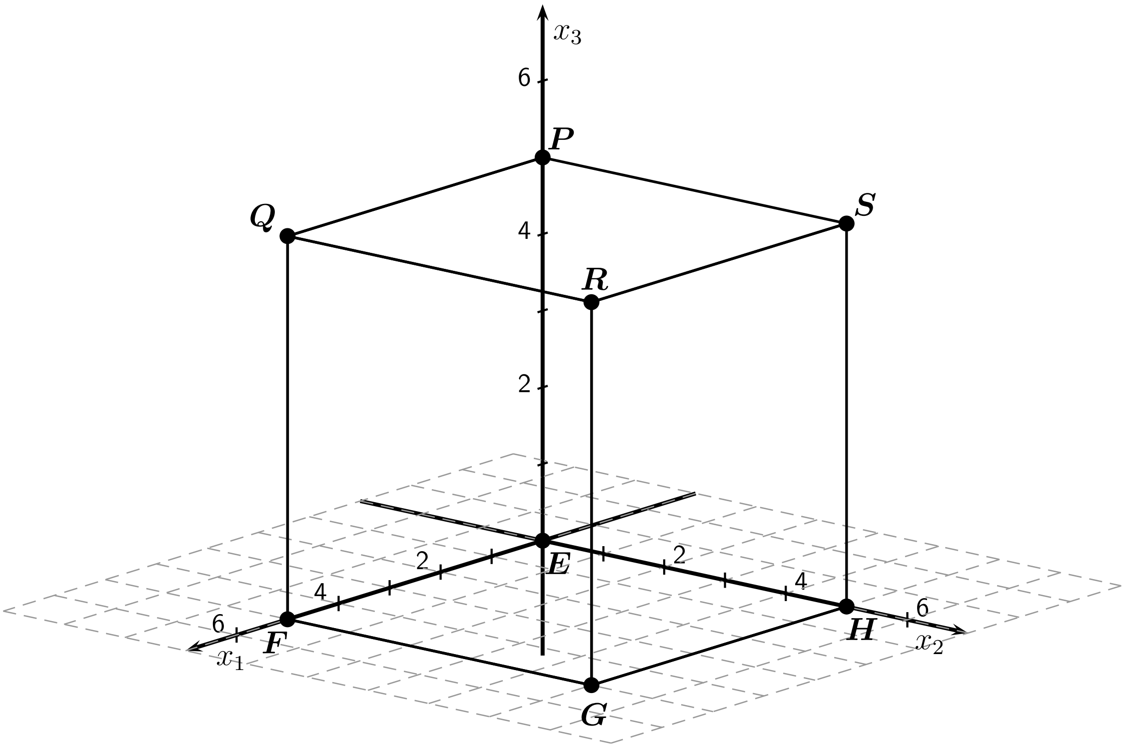
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) $f_6(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 - 2\sqrt{3} \;\vee\; x = 3 \;\vee\; x = 3 + 2\sqrt{3}$ Schnittpunkte mit der x-Achse: $(3 - 2\sqrt{3} \,\vert\, 0)$, $(3 \,\vert\, 0)$, $(3 + 2\sqrt{3} \,\vert\, 0)$	1		
$f_6(0) = 9$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \,\vert\, 9)$	1		
Notwendig für eine Extremstelle x von f_6 ist $f_6'(x) = 0$. $f_6'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$	2		
Wegen $f_6''(1) = -12 \neq 0$, $f_6''(5) = 12 \neq 0$, $f_6(1) = 16$ und $f_6(5) = -16$ lauten die Koordinaten der Extrempunkte von G_6 $(1 \,\vert\, 16)$ und $(5 \,\vert\, -16)$.	2		
	2		
Für $k_1 \neq k_2$ gilt $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \;\Leftrightarrow\; x = -0{,}5 \;\vee\; x = 3$. Es ist $f_k(-0{,}5) = -0{,}875$ und $f_k(3) = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$. Damit verlaufen alle Graphen G_k durch die Punkte $(-0{,}5 \,\vert\, -0{,}875)$ und $(3 \,\vert\, 0)$.		4	
Notwendig für eine Extremstelle x von f_k ist $f_k'(x) = 0$.	1		
Wegen $2k^2 - 3k + 18 > 0$ für alle k		1	
hat die Gleichung $f_k'(x) = 0$ für alle k jeweils die beiden verschiedenen Lösungen $x_1 = \frac{2(k+3)-\sqrt{2(2k^2-3k+18)}}{6}$ und $x_2 = \frac{2(k+3)+\sqrt{2(2k^2-3k+18)}}{6}$.		1	
Weil zusätzlich $f_k''(x_1) = -\sqrt{2(2k^2 - 3k + 18)} \neq 0$ und $f_k''(x_2) = \sqrt{2(2k^2 - 3k + 18)} \neq 0$ für alle k gilt, liegen an den Stellen x_1 und x_2 Extrempunkte von G_k vor. Damit hat G_k für jeden Wert von k genau zwei Extrempunkte.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Notwendig für eine Wendestelle x von f_k ist $f_k''(x)=0$. $f_k''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{k+3}{3}$ Damit liegt an der Stelle $x=\frac{k+3}{3}$ der Wendepunkt von G_k. $\frac{k+3}{3}=0 \Leftrightarrow k=-3$ $f_k(\frac{k+3}{3})=0 \Leftrightarrow k=6 \vee k=-\frac{3}{8}(\sqrt{57}+5) \vee k=\frac{3}{8}(\sqrt{57}-5)$ Für genau diese vier Werte von k liegt der Wendepunkt von G_k auf einer Koordinatenachse.		4	
Die Größe des Winkels, den die Wendetangente von G_k mit der x-Achse einschließt, ist genau für den Wert von k minimal, für den der Wert der Steigung der Wendetangente von G_k betragsmäßig minimal ist. Die Steigung der Wendetangente hat den Wert $f_k'(\frac{k+3}{3})=\frac{-k^2}{3}+\frac{k}{2}-3$. Zu bestimmen ist das globale Minimum von $s(k)=\left\lvert\frac{-k^2}{3}+\frac{k}{2}-3\right\rvert$. Wegen $s'(k)=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{4}$ und $s''(k)=\frac{2}{3}>0$ für alle k liegt für $k=0{,}75$ die betragsmäßig kleinste Steigung der Wendetangente vor. Der entsprechende Schnittwinkel beträgt $\arctan\left(s(0{,}75)\right)\approx 70{,}4°$.			2 3
$V_1=\pi\int\limits_0^3 (f_6(x))^2\,\mathrm{d}x=\frac{15471}{35}\pi\approx 1388{,}67$ $V_2=\pi\int\limits_3^6 (f_6(x))^2\,\mathrm{d}x=\frac{15471}{35}\pi\approx 1388{,}67$	2		
Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Mögliche Begründung: Das Rechteck I mit den Eckpunkten $(0\mid 0)$, $(2\mid 0)$, $(2\mid 1)$ und $(0\mid 1)$ und das Rechteck II mit den Eckpunkten $(0\mid 0)$, $(1\mid 0)$, $(1\mid 2)$ und $(0\mid 2)$ haben den gleichen Flächeninhalt 2. Die Volumina der zugehörigen Rotationskörper sind mit $\pi\cdot 1^2\cdot 2=2\pi$ bzw. $\pi\cdot 2^2\cdot 1=4\pi$ jedoch verschieden.		1	2
Teilaufgabe b) $\int\limits_0^3 f_1(x)\,\mathrm{d}x=0$ Interpretation: In den ersten 3 Stunden nach Beobachtungsbeginn fließt genauso viel Wasser zu wie ab. *Alternativ:* Die Füllmenge in der Tonne ist um 12:00 Uhr genauso groß wie um 15:00 Uhr.	1	1	

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Die maximale Füllmenge der Regentonne liegt zu der durch die mittlere Nullstelle von f_1 gegebenen Zeit vor. Vorher fließt Wasser zu, nachher fließt Wasser ab.
$f_1(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -0{,}3660 \;\vee\; x \approx 1{,}3660 \;\vee\; x = 3$
Mit $0{,}8 + \int\limits_{0{,}25}^{1{,}3660} f_1(x)\,\mathrm{d}x \approx 2{,}2201$ ergibt sich für die Füllmenge zu dieser Zeit ein Wert von etwa $2{,}2\,\mathrm{m}^3$.</td><td></td><td>2
2</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe c)
Notwendig dafür, dass zur Zeit x mit $0 \leq x \leq 3$ ein lokales Maximum des Füllmengenunterschiedes vorliegt, ist, dass die Änderungsrate des Füllmengenunterschiedes zu dieser Zeit den Wert null hat.
Es gilt $f_{k_2}(x) - f_{k_1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$, denn für $0 \leq x \leq 3$ ist 3 die einzige Schnittstelle der Graphen G_{k_2} und G_{k_1} (siehe Aufgabe a2)).
Da der Füllmengenunterschied zu Beobachtungsbeginn (12:00 Uhr) gleich null war, liegt zur Zeit 15:00 Uhr auch das globale Maximum des Füllmengenunterschieds vor.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>Punktsummen</td><td>12</td><td>18</td><td>10</td></tr>
</table>

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Die Abbildung zeigt den Würfel $EFGHPQRS$ mit $E(0\,|\,0\,|\,0)$ und $R(5\,|\,5\,|\,5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $A(5\,|\,0\,|\,1)$, $B(2\,|\,5\,|\,0)$, $C(0\,|\,5\,|\,2)$ und $D(1\,|\,0\,|\,5)$.



a) a1) Geben Sie die Koordinaten der Punkte G und S an. (2 P)

a2) Zeichnen Sie das Viereck $ABCD$ in die Abbildung ein. (2 P)

a3) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, bei dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. (3 P)

a4) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$. (4 P)

b) b1) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.
[zur Kontrolle: $T:\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$] (4 P)

b2) Die Ebene T schneidet die Kante $\overline{PS}$ des Würfels im Punkt Z.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Z. (4 P)

c) Die Ebene T' wird durch die Gleichung $-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ beschrieben.

c1) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich T und T' schneiden. (3 P)

c2) Es gibt eine reelle Zahl a, so dass die Ebene T' aus der Ebene T durch Spiegelung an der Ebene mit der Gleichung $x_1 = a$ hervorgeht.
Bestimmen Sie diese Zahl a. (4 P)

Betrachtet wird die Schar der Geraden

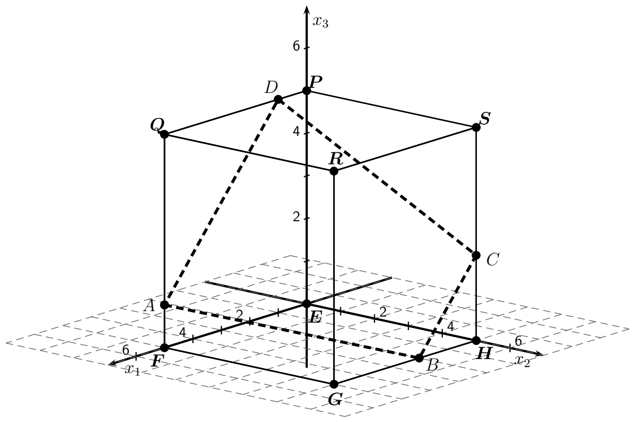
$$g_b : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10b \\ \frac{2}{b} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{R}\,.$$

c3) Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$ liegt. (2 P)

c4) Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und T' zur betrachteten Schar gehört. (4 P)

d) Bestimmen Sie die Gleichung einer Kugel mit dem Radius $\sqrt{\frac{33}{2}}$, auf deren Oberfläche die Punkte P, Q, R und S liegen. (4 P)

e) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$ liegt auf der Strecke $\overline{QR}$.
Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 sein kann. (4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) $G(5\mid 5\mid 0)$, $S(0\mid 5\mid 5)$	2		
	2		
Wegen $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}$ sind die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ parallel. Damit ist $ABCD$ ein Trapez. Mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}$ gilt $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{3^2+5^2+1^2} = \lvert\overrightarrow{DC}\rvert$. Damit sind zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang.	3		
Es ist $\frac{1}{2}\left\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right\rvert = 2\cdot\sqrt{66}\approx 16{,}248$ der Flächeninhalt des Dreiecks DAB und $\frac{1}{2}\left\lvert\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{66}\approx 8{,}124$ der Flächeninhalt des Dreiecks BCD. Damit hat das Trapez $ABCD$ einen Flächeninhalt von ca. $24{,}372$.		4	
Teilaufgabe b) Mit $\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-10\\-8\\-10\end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene T. Wegen $5\cdot 5+4\cdot 0+5\cdot 1=30$ ist $5x_1+4x_2+5x_3-30=0$ eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.		2 2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Die Kante $\overline{PS}$ liegt auf der durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ gegebenen Geraden. Wegen $5 \cdot 0 + 4 \cdot 5s + 5 \cdot 5 - 30 = 0 \Leftrightarrow 20s - 5 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{4}$ ist $\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$ und folglich $Z(0 \mid \frac{5}{4} \mid 5)$ der Punkt, in dem die Ebene T die Kante $\overline{PS}$ schneidet.	1 2 1		
Teilaufgabe c) Es ist $\vec{n}_{T'} = \begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene T'. Der Winkel α, unter dem sich die beiden Ebenen T und T' schneiden, ist damit $\alpha = \arccos\left(\frac{\left\lvert\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix}\right\rvert}\right) = \arccos(\frac{8}{33}) \approx 76{,}0°$.	1	2	
Durch Spiegelung an der durch $x_1 = a$ gegebenen Ebene fällt z.B. der Punkt $D(1 \mid 0 \mid 5)$ in der Ebene T auf $D'(2a-1 \mid 0 \mid 5)$ in der Ebene T'. $-5 \cdot (2a-1) + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 5 - 5 = 0 \Leftrightarrow -10a + 25 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$			4
Eine Gerade liegt genau dann in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$, wenn für alle Punkte dieser Geraden $x_3 = 3{,}5$ gilt. Da $\frac{2}{b} \neq 0$ für alle $b \in \mathbb{R}^+$ gilt, liegt keine Gerade der Schar in dieser Ebene.		2	
Alle Geraden g_b verlaufen durch den Punkt $(2{,}5 \mid 0 \mid 3{,}5)$. Dieser Punkt liegt wegen $5 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3{,}5 - 30 = 0$ und $-5 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3{,}5 - 5 = 0$ sowohl in T als auch in T'. Für $b \in \mathbb{R}^+$ gilt $\begin{pmatrix}0\\-10b\\\frac{2}{b}\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -40b + \frac{10}{b} = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$. Damit liegt $g_{\frac{1}{2}}$ in T. Wegen $\begin{pmatrix}0\\-5\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-5\\4\\5\end{pmatrix} = 0$ liegt $g_{\frac{1}{2}}$ auch in T'. Also ist die Gerade $g_{\frac{1}{2}}$ die Schnittgerade von T und T'.			4

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Für den Mittelpunkt $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$ einer solchen Kugel muss $m_1 = m_2 = 2{,}5$		1	
sowie $\sqrt{\frac{33}{2}} = \left\lvert \overrightarrow{PM} \right\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ m_3 - 5 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}5^2 + (m_3 - 5)^2}$ gelten.		1	
Somit ist $m_3 = 3$ oder $m_3 = 7$ und z.B. $K: \ (x_1 - 2{,}5)^2 + (x_2 - 2{,}5)^2 + (x_3 - 7)^2 = \frac{33}{2}$ eine Gleichung einer solchen Kugel.		2	
Teilaufgabe e) Die Kante $\overline{QR}$ liegt auf der durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegebenen Geraden h. Für einen bestimmten Wert $t \in [0\,;5]$ ist der zugehörige Punkt auf der Geraden h die Spitze der Pyramide.		2	
Dieser Punkt hat damit den Abstand $\frac{\lvert 5\cdot 5 + 4\cdot t + 5\cdot 5 - 30\rvert}{\sqrt{66}} = \frac{\lvert 4t+20\rvert}{\sqrt{66}}$ zur Ebene T. Wegen $\lvert 4t + 20\rvert > 2\sqrt{66} \approx 16{,}25$ für $t \in [0\,;5]$ kann die Pyramide nicht die Höhe 2 haben.			2
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

In der Kundendatei eines Reisebüros befinden sich tausende Kundendaten. Dieses Reisebüro bietet auch Fahrten mit einem Ausflugsschiff an.

a) $6\,\%$ aller Kunden haben bisher schon einmal eine solche Fahrt gebucht und wurden in der Datei mit einem „S“ markiert. Es werden nun 550 Kunden zufällig aus der Kundendatei ausgewählt. Verwenden Sie bei den folgenden Berechnungen die Binomialverteilung.

a1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 40, aber höchstens 50 der ausgewählten Kunden mit einem „S“ gekennzeichnet sind. (4 P)

a2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ausgewählten Kunden weniger mit einem „S“ gekennzeichnet sind, als es zu erwarten ist. (3 P)

a3) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis A an, dessen Wahrscheinlichkeit $0{,}94^{550}$ beträgt. (1 P)

b) Betrachtet wird nun eine Fahrt mit dem Ausflugsschiff, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden vier Fahrgäste zufällig ausgelost, die jeweils eine Stofftasche mit Werbegeschenken als Preis erhalten. An der Fahrt nimmt eine Familie mit Vater, Mutter und zwei Kindern teil.

b1) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Vater einen Preis gewinnt. (1 P)

b2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Familie genau zwei Preise gewinnt. (3 P)

b3) Zusätzlich befindet sich in einer der Stofftaschen ein Gutscheinheft (Hauptpreis). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Familie genau zwei Preise, aber nicht den Hauptpreis gewinnt. (3 P)

c) Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Nach der Erfahrung des Reisebüros treten nur $90\,\%$ der Personen, die eine Fahrt reserviert haben, auch zur Fahrt an.
Das Reisebüro nimmt für jede Fahrt immer 64 Reservierungen an, obwohl nur 60 Plätze auf dem Schiff vorhanden sind. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so müssen die überzähligen Personen abgewiesen werden.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zu der Fahrt erscheinen.

c1) Geben Sie im Sachzusammenhang einen Grund dafür an, dass die Zufallsgröße X im Allgemeinen nicht binomialverteilt ist. (1 P)

Im Folgenden wird dennoch vereinfachend angenommen, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist. Außerdem wird vorausgesetzt, dass für jede Fahrt 64 Reservierungen vorliegen.

c2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Fahrt mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss. (3 P)

Der Fahrpreis beträgt 60 Euro. Bei der Reservierung ist eine Anzahlung von 20 Euro zu entrichten, die beim Nichtantreten der Fahrt verfällt. Wenn eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss, bekommt sie vom Reisebüro nicht nur die Anzahlung zurück, sondern zusätzlich eine Entschädigung in Höhe von 100 Euro ausgezahlt.

c3) Das Reisebüro geht davon aus, dass die Summe der fälligen Rück- und Entschädigungszahlungen durchschnittlich weniger als 20 Euro pro Fahrt beträgt.
Begründen Sie, dass man unter dieser Annahme mit dem Überbuchungsverfahren einen zusätzlichen Gewinn von über 60 Euro pro Fahrt gegenüber der Beschränkung auf 60 Reservierungen erwarten kann. (2 P)

c4) Bei 64 Personen mit Reservierung beschreibt die Zufallsgröße Y die Anzahl der Personen, die zu einer Fahrt nicht antreten.
Berechnen Sie den Term $\sum_{i=0}^{3} (P(Y=i) \cdot (4-i) \cdot 120)$ und erläutern Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang. (4 P)

d) Die Geschäftsführerin des Reisebüros vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person eine reservierte Fahrt antritt, kleiner als $90\,\%$ ist. Sie beauftragt daher einen Mitarbeiter, einen Test mit einem Signifikanzniveau von $2{,}5\,\%$ zu erstellen, der geeignet ist, ihre Vermutung zu stützen.

d1) Der Mitarbeiter wählt eine Stichprobe von 64 zu einer Fahrt angemeldeten Personen.
Erstellen Sie den geforderten Signifikanztest, und geben Sie die entsprechende Entscheidungsregel an. (7 P)

d2) Der Mitarbeiter wählt vier Fahrten zufällig aus. Er führt für jede dieser Fahrten seinen Test durch. Aufgrund von 54, 56, 54 bzw. 55 zur jeweiligen Fahrt angetretenen Personen kann er in keinem der vier Fälle seine Nullhypothese verwerfen.
Zeigen Sie, dass bei einem Test mit gleichem Signifikanzniveau und gleicher Nullhypothese, der aber die insgesamt ausgewählten 256 Personen als Stichprobe verwendet, das ermittelte Ergebnis im Verwerfungsbereich der Nullhypothese liegt. (3 P)

d3) Es ist c eine positive ganze Zahl.
Die Zufallsgröße X_c ist binomialverteilt mit den Parametern $c \cdot n$ und p.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für alle n und p wahr sind.

(1) Für alle $c \geq 2$ gilt $E(X_c) = c \cdot E(X_1)$.
(2) Für alle $c \geq 2$ und $k \in \{1; \ldots; n\}$ gilt $P(X_1 \leq k) = P(X_c \leq c \cdot k)$.

Führen Sie jeweils einen entsprechenden Nachweis. (5 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Kunden mit der Kennzeichnung „S“. Sie ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 550$ und $p = 0{,}06$. $P(40 < X \leq 50) = P(X \leq 50) - P(X \leq 40)$ $\approx 0{,}9984 - 0{,}9080 = 0{,}0904 = 9{,}04\%$	1 3		
Es ist $E(X) = 550 \cdot 0{,}06 = 33$. $P(X < 33) = P(X \leq 32) \approx 0{,}4747 = 47{,}47\,\%$	1 2		
Ereignis A: „Von den 550 ausgewählten Kunden ist keiner mit einem „S“ gekennzeichnet.“	1		
Teilaufgabe b) $p = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$	1		
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der von der Familie erhaltenen Preise. X ist hypergeometrisch verteilt und es ist $P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{56}{2}}{\binom{60}{4}} \approx 0{,}0189 = 1{,}89\%$.		3	
Es gibt $\binom{60}{4}$ Möglichkeiten, die drei Preise, den Hauptpreis und die 56 Nieten auf die 4 Personen zu verteilen. Günstig davon sind die, bei denen 2 von den drei Preisen und 2 von den 56 Nieten verteilt werden. Es ist $\frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{56}{2}}{\binom{60}{4}} \approx 0{,}0095 = 0{,}95\%$. Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Familie genau zwei Preise aber keinen Hauptpreis gewinnt, beträgt ungefähr $0{,}95\%$.			3
Teilaufgabe c) Das Erscheinen bzw. Nichterscheinen erfolgt in der Regel für einige Personen mit Reservierung (z.B. befreundete Personen) nicht unabhängig voneinander.	1		
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt antreten. Sie ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 64$ und $p = 0{,}9$. $P(X > 60) = 1 - P(X \leq 60) \approx 1 - 0{,}8937 = 0{,}1063 = 10{,}63\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss, beträgt ungefähr $10{,}63\%$.		3	
Werden 64 statt der 60 Reservierungen vom Reisebüro angenommen, so werden $4 \cdot 20$ Euro $= 80$ Euro mehr eingenommen. Geht man davon aus, dass die durchschnittlichen Zahlungen weniger als 20 Euro betragen, ergibt sich ein zusätzlicher Gewinn von über 60 Euro pro Fahrt.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit $n = 64$ und $p = 0{,}1$. Es sind $P(Y = 0) \approx 0{,}0012$, $P(Y = 1) \approx 0{,}0084$, $P(Y = 2) \approx 0{,}0293$ und $P(Y = 3) \approx 0{,}0674$. Damit folgt $\sum\limits_{i=0}^{3}(P(Y = i) \cdot (4 - i) \cdot 120)$ $\approx 0{,}0012 \cdot 480 + 0{,}0084 \cdot 360 + 0{,}0293 \cdot 240 + 0{,}0674 \cdot 120 = 18{,}72$. Der Term gibt die zu erwartende durchschnittliche Summe der Rück- und Entschädigungszahlungen des Reisebüros pro Fahrt in Euro an.		2	2
Teilaufgabe d) Die Zufallsgröße X_p beschreibt die Anzahl der antretenden Personen mit einer Reservierung. X_p ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 64$ und p. Weil die Hypothese $H_1 : p < 0{,}9$ gestützt werden soll, wird $H_0 : p \geq 0{,}9$ als Nullhypothese gewählt. Wenn die Hypothese $H : p = 0{,}9$ linksseitig verworfen werden kann, so auch die Nullhypothese H_0. Zu bestimmen ist das größte k mit $P(X \leq k) \leq 0{,}025$. Es ist $P(X \leq 52) \approx 0{,}0236$ und $P(X \leq 53) \approx 0{,}0516$. Erscheinen also höchstens 52 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so wird die Nullhypothese abgelehnt und die Vermutung der Geschäftsführerin wird gestützt.	1 1	4 1	
Von den betrachteten 256 Personen sind 219 zur Fahrt erschienen. Ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 256$ und $p = 0{,}9$, so gilt $P(X \leq 219) \approx 0{,}0148 \leq 0{,}025$. Daher läge das Ergebnis mit den 219 Personen im Verwerfungsbereich der Nullhypothese.		3	
Die Aussage (1) ist wahr, denn es gilt $E(X_c) = (c \cdot n) \cdot p = c \cdot (1 \cdot n \cdot p) = c \cdot E(X_1)$. Die Aussage (2) ist falsch, denn es gibt Gegenbeispiele, siehe z.B. d2): Die Zufallsgröße X_1 ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 64$ und $p = 0{,}9$. Mit $k = 52$ gilt $P(X_1 \leq k) = P(X_1 \leq 52) \approx 0{,}0236$. Die Zufallsgröße X_4 ist binomialverteilt mit den Parametern $4 \cdot 64 = 256$ und $p = 0{,}9$. Es gilt $P(X_4 \leq 4 \cdot 52) = P(X_4 \leq 208) \approx 0{,}00002 \neq 0{,}0236 \approx P(X_1 \leq 52)$.			2 3
Punktsummen	12	18	10