Beispielaufgabe

zum Format der Komplexaufgaben im MSA Mathematik ab 2017

Format der Komplexaufgaben und Wahlverfahren ab 2017

Im Teil B (Komplexaufgaben) werden den Schülerinnen und Schülern **vier Aufgaben** vorgelegt, die jeweils aus einem **Pflichtteil** und einem vertiefenden **Wahlteil** bestehen.

Bei allen vier Aufgaben muss der Pflichtteil, in dem jeweils 12 Bewertungspunkte vorgesehen sind, bearbeitet werden. Bei zwei der vier Aufgaben muss der Wahlteil, in dem jeweils 6 Bewertungspunkte vorgesehen sind, bearbeitet werden.

Die Schülerinnen und Schüler entscheiden, bei welchen zwei Aufgaben sie den Wahlteil bearbeiten. Für diese Entscheidung sollte die Einlesezeit genutzt werden. Die Bearbeitungszeit sollte möglichst nur für zwei der Wahlteile genutzt werden. Bei mehr als zwei bearbeiteten Wahlteilen sind diejenigen zwei zu werten, bei denen die höchste Punktzahl erreicht wurde.

Die thematische Zuordnung der Sachgebiete 'Trigonometrie', 'Stereometrie' sowie 'Statistik und Wahrscheinlichkeit' entspricht derjenigen der Komplexaufgaben aus den Vorjahren. Diese Zuordnung ist nicht absolut zu verstehen; in den Teilaufgaben einer Komplexaufgabe können auch Inhalte aus mehreren Leitideen vernetzt sein. Die Komplexaufgabe zum Sachgebiet 'Funktionen' umfasst ab 2017 sowohl Inhalte aus dem Bereich 'quadratische und lineare Funktionen' als auch aus dem Bereich 'exponentielles Wachstum / Exponentialfunktion'. Dabei können in den Teilaufgaben einer Komplexaufgabe Inhalte aus beiden Bereichen angesprochen und auch mit Inhalten aus anderen Leitideen vernetzt werden.

Hinweise zur Nutzung des Taschenrechners ab 2018/2019

In dieser Beispielaufgabe orientiert sich die Punktewertung in Teilaufgabe **d)**
'Ansatz 1 P – ***Lösen der Gleichung 1 P*** *– Auswahl der relevanten Lösung sowie deren Interpretation im Sachzusammenhang 1 P'* bereits an den Fachanforderungen von 2014. Darin wird die Nutzung der erweiterten Möglichkeiten des Taschenrechners wie *'Wertetabellen anlegen'* oder *'Lösen von Gleichungen'* als verbindlicher Unterrichtsgegenstand genannt (Fachanforderungen Sek. I, S. 24, S. 32).

Die Aufgabenstellungen des MSA werden erst ab dem Schuljahr 2018/2019 voraussetzen, dass diese Möglichkeiten des Rechners beim Bearbeiten der Komplexaufgaben regelmäßig genutzt werden.

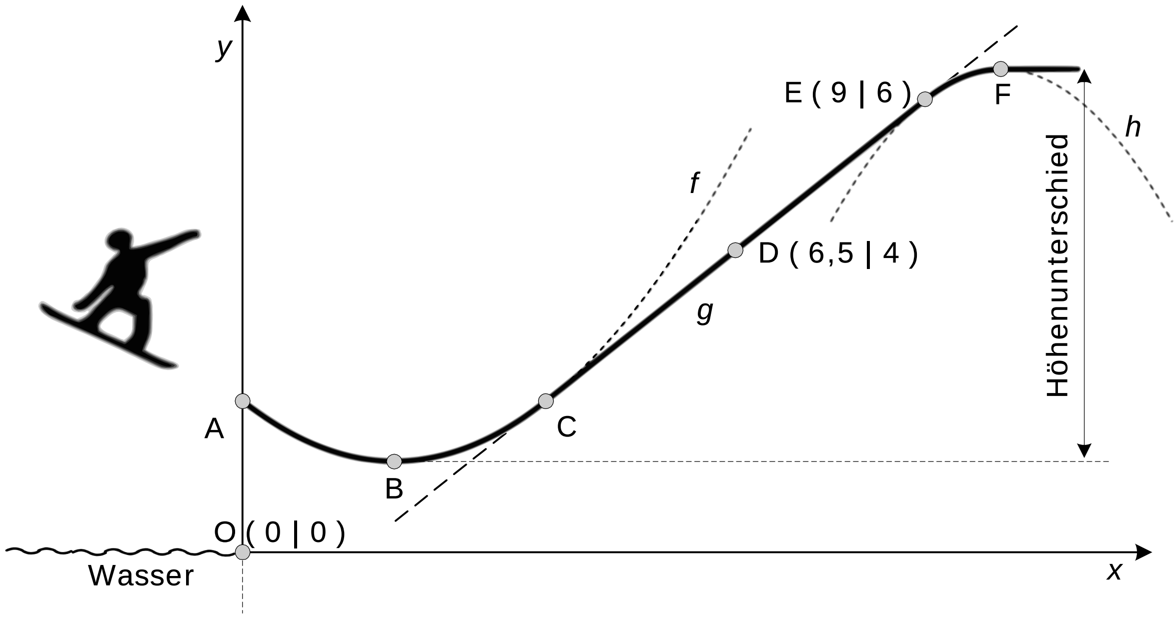
Es ist laut Fachanforderungen schon gegenwärtig zulässig, die erweiterten Möglichkeiten des Taschenrechners zu nutzen. Vor dem Schuljahr 2018/2019 wäre jedoch eine schriftliche Rechnung zu erwarten, die die in **d)** gegebene quadratische Ergänzung oder die Lösungsformel nutzt, so dass dieser Teil derzeit mit *'Ansatz 1 P –* ***Lösen der Gleichung 2 P*** *– Auswahl der relevanten Lösung sowie deren Interpretation im Sachzusammenhang 1 P*' zu bewerten wäre.

Selbstverständlich bleiben schriftliche Lösungsverfahren, trotz der Nutzung der erweiterten Möglichkeiten des wissenschaftlichen Taschenrechners, weiterhin Unterrichtsgegenstand und können im Teil A (Kurzformaufgaben) Gegenstand der Abschlussprüfung sein.

B3 Funktionen	**Pflichtteil**

Wasser-Sprungschanze

Snowboarder trainieren im Sommer gerne auf Wasser-Sprungschanzen. Jede Abfahrt endet mit einem Sprung ins Wasser. Die Abbildung zeigt einen Entwurf für eine solche Sprungschanze.



Die Form der Sprungschanze wird durch die Parabeln *f* und *h* beschrieben. Diese sind zwischen den Punkten C und E durch die Gerade *g* verbunden.

Das Koordinatensystem wurde folgendermaßen gewählt: Die *x*-Achse verläuft in Höhe des Wasserspiegels. Das Ende der Sprungschanze (Punkt A) liegt genau auf der *y*-Achse. Eine Längeneinheit soll einem Meter in der Wirklichkeit entsprechen.

Die Funktionsgleichungen der Parabeln lauten

im unteren Teil der Sprungschanze $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + 2$,

im oberen Teil der Sprungschanze $h(x) = -0{,}4 \cdot (x-10)^2 + 6{,}4$.

a)
- Bestimme mit Hilfe der Funktionsgleichung von *f* die *y*-Koordinate des Punktes A.
- Gib die Bedeutung dieses *y*-Wertes für die Sprungschanze an.

2 P.

b)
- Bestimme mit Hilfe der Funktionsgleichungen die Koordinaten der Scheitelpunkte B und F der beiden Parabeln *f* und *h*.
- Berechne mit Hilfe dieser Werte den Höhenunterschied zwischen den Punkten B und F.

5 P.

c) Die Gerade g geht durch die Punkte D (6,5 | 4) und E (9 | 6).

- Berechne die Steigung der Sprungschanze im geradlinig verlaufenden Teil.
- Bestimme eine Geradengleichung von g.
- Bestimme die Koordinaten des Punktes C.

5 P.

B3 Funktionen — Wahlteil

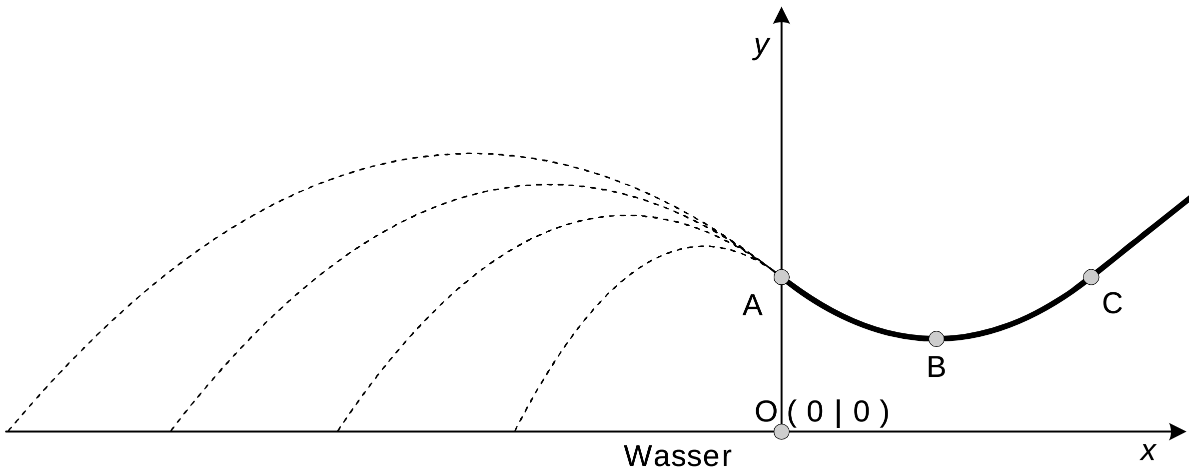
d) Die beim Absprung erreichte Geschwindigkeit bestimmt die Sprungweite. Die Abbildung zeigt vier mögliche Flugbahnen:

$s_1(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + 2 = -\frac{2}{5}(x+1)^2 + 2{,}4$,

$s_2(x) = -\frac{2}{10}x^2 - \frac{4}{5}x + 2 = -\frac{2}{10}(x+2)^2 + 2{,}8$,

$s_3(x) = -\frac{2}{15}x^2 - \frac{4}{5}x + 2 = -\frac{2}{15}(x+3)^2 + 3{,}2$ und

$s_4(x) = -\frac{2}{20}x^2 - \frac{4}{5}x + 2 = -\frac{2}{20}(x+4)^2 + 3{,}6$.



- Entscheide, welche von den vier angegebenen Flugbahnen s_1 bis s_4 den weitesten Sprung beschreibt.
- Begründe diese Entscheidung.
- Berechne für diesen Sprung die Sprungweite, gemessen vom Punkt O aus.

6 P.

B3 Funktionen	**Lösungen Pflichtteil**

Wasser-Sprungschanze

a)

- Bestimme mit Hilfe der Funktionsgleichung von *f* die *y*-Koordinate des Punktes A.

  Man kann aus der Gleichung $f(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x+2$ unmittelbar ablesen, dass $f(0)=2$ ist. (1)

- Gib die Bedeutung dieses *y*-Wertes für die Sprungschanze an.

  Die Sprungschanze endet in 2 m Höhe über der Wasseroberfläche. (1)

2 P.

b)

- Bestimme mit Hilfe der Funktionsgleichungen die Koordinaten der Scheitelpunkte B und F der beiden Parabeln *f* und *h*.

  Man kann aus der Gleichung $h(x)=-0{,}4\cdot(x-10)^2+6{,}4$ unmittelbar die Koordinaten des Scheitelpunktes ablesen: F (10 | 6,4). (1)

  Die Gleichung $f(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x+2$ muss in die Scheitelpunktform gebracht werden.

  $f(x)=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x+2$

  $f(x)=\frac{1}{5}\cdot(x^2-4x)+2$ (1)

  $f(x)=\frac{1}{5}\cdot(x^2-4x+4-4)+2$

  $f(x)=\frac{1}{5}\cdot(x^2-4x+4)-\frac{1}{5}\cdot 4+2$ (1)

  $f(x)=\frac{1}{5}\cdot(x-2)^2+1{,}2$

  Aus dieser Gleichung kann man die Koordinaten des Scheitelpunktes ablesen: B (2 | 1,2). (1)

- Berechne mit Hilfe dieser Werte den Höhenunterschied zwischen den Punkten B und F.

  $6{,}4-1{,}2=5{,}2$

  Der Höhenunterschied zwischen den Punkten F und B beträgt 5,2 m. (1)

5 P.

c) Die Gerade *g* geht durch die Punkte D (6,5 | 4) und E (9 | 6).

➢ Berechne die Steigung der Sprungschanze im geradlinig verlaufenden Teil.

Die Steigung der Geraden *g* ist $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-4}{9-6{,}5} = \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$. Die Steigung der Sprungschanze im geradlinig verlaufenden Teil beträgt 0,8. (1)

➢ Bestimme eine Geradengleichung von *g*.

Ansatz: $g(x) = 0{,}8x + b$

Für den Punkt E (9 | 6) gilt $g(9) = 6$. Daraus ergibt sich $6 = 0{,}8 \cdot 9 + b$. (1)

$$6 = 0{,}8 \cdot 9 + b$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 = 7{,}2 + b$$

$$\Leftrightarrow \quad -1{,}2 = b$$

Die Gerade hat die Gleichung $g(x) = 0{,}8x - 1{,}2$. (1)

Auch eine Bestimmung des Achsenabschnittes durch Zeichnen und Messen wäre zulässig, siehe nachfolgende Anmerkung.

➢ Bestimme die Koordinaten des Punktes C.

Der Punkt C hat die Koordinaten C (4 | 2). (2)

Der Operator "bestimme" deutet darauf hin, dass nicht unbedingt eine formale Rechnung erwartet wird, sondern auch andere Vorgehensweisen zur Bestimmung der gesuchten Koordinaten möglich sind, beispielsweise

- *Längenmessung in der maßstäblichen Zeichnung, Erschließen des Maßstabes aus den bereits bekannten Koordinaten anderer Punkte oder*
- *Ausnutzung der achsensymmetrischen Lage der Punkte C und A bezüglich einer vertikalen Geraden, die durch den Scheitelpunkt B der Parabel f geht.*

  Beides führt zu der Vermutung, dass C an der Stelle $x = 4$ *liegt. Diese kann durch* $p(4) = \frac{1}{5} \cdot 4^2 - \frac{4}{5} \cdot 4 + 2 = \frac{16}{5} - \frac{16}{5} + 2 = 2$ *und* $g(4) = 0{,}8 \cdot 4 - 1{,}2 = 3{,}2 - 1{,}2 = 2$ *rechnerisch überprüft werden; beide Funktionsgleichungen ergeben an der Stelle* $x = 4$ *den gleichen y-Wert*
- *Auch eine formale Rechnung zur Bestimmung des Schnittpunktes der Graphen von f und von g ist möglich: Der Ansatz* $g(x) = f(x)$ *führt auf die Gleichung* $0{,}8x - 1{,}2 = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + 2$. *Diese Gleichung könnte mit dem Taschenrechner gelöst werden, siehe einführende Hinweise.*

5 P.

B3 Funktionen	Lösungen Wahlteil

d)

- Entscheide, welche von den vier angegebenen Flugbahnen s_1 bis s_4 den weitesten Sprung beschreibt.

  Die Flugbahn $s_4(x) = -\frac{2}{20}(x+4)^2 + 3{,}6$ beschreibt den weitesten Sprung. (1)

- Begründe diese Entscheidung.

  Der Scheitelpunkt (–4 | 3,6) der Parabel s_4 liegt höher und weiter links als die Scheitelpunkte (–3 | 3,2), (–2 | 2,8) und (–1 | 3,4) der anderen Parabeln. Also liegt der linke Schnittpunkt der Parabel s_4 mit der x-Achse auch am weitesten links, er hat den größten Abstand vom Punkt O. (2)

- Berechne für diesen Sprung die Sprungweite, gemessen vom Punkt O aus.

  Für den Auftreffpunkt auf dem Wasser gilt $s_4(x) = 0$. (1)

$$-\frac{2}{20}(x+4)^2 + 3{,}6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{20}(x+4)^2 = -3{,}6$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \quad x+4 = 6 \quad \text{oder} \quad x+4 = -6$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \text{oder} \quad x = -10$$

Lösung dieser Gleichung, auch mit Hilfe entsprechender Funktionen des Taschenrechners, siehe einführende Hinweise. (1)

Weil der Sprung von A aus nach links führt, kommt für den Auftreffpunkt nur die Lösung –10 in Frage. Die Sprungweite beträgt 10 m. (1)

Falls die Nullstellen einer anderen der gegebenen Parabeln richtig bestimmt wurden, so sollen für das Lösen der entsprechenden Gleichung und für die Wahl der negativen Lösung die beiden vorgesehenen Punkte vergeben werden.

6 P.