

**Kernfach Mathematik**

---

**HMF 1 - Analysis (Pool 1)**

Gegeben ist die ganzrationale Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - \frac{8}{3}$ .

Es ist  $f'(x) = x^2 - 6x + 8$ .

1.1 Geben Sie den Funktionswert von  $f$  und die Steigung des Graphen von  $f$  jeweils an der Stelle 2 an.

(2 P)

1.2 Untersuchen Sie, ob 3 eine Wendestelle von  $f$  ist.

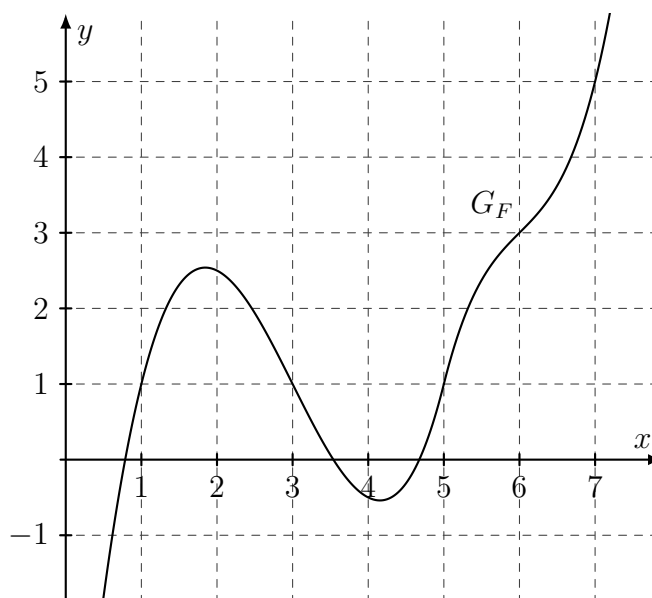
(3 P)

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1) |                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.1                                                      | $f(2) = 4, f'(2) = 0$<br>2 P                                                                                                     |
| 1.2                                                      | Mit $f''(x) = 2x - 6$ und $f'''(x) = 2$ folgen $f''(3) = 0$ und $f'''(3) \neq 0$ . Damit ist 3 eine Wendestelle von $f$ .<br>3 P |

**Kernfach Mathematik**

**HMF 2 - Analysis (Pool 1)**

Betrachtet werden die in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f$  und  $F$ , wobei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Die Abbildung zeigt den Graphen  $G_F$  von  $F$ .



2.1 Bestimmen Sie den Wert des Integrals  $\int_1^7 f(x) dx$ .

(2 P)

2.2 Bestimmen Sie den Funktionswert von  $f$  an der Stelle 1.  
Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung.

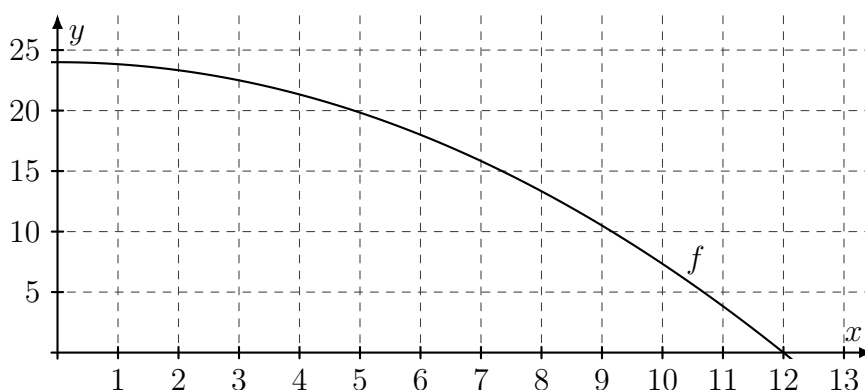
(3 P)

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1) |                                                                                    |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 2.1                                                      | $\int_1^7 f(x) dx = F(7) - F(1) = 5 - 1 = 4$ <p style="text-align: right;">2 P</p> |
| 2.2                                                      | $f(1) = F'(1) \approx 4$ <p style="text-align: right;">3 P</p>                     |

**Kernfach Mathematik**

**HMF 3 - Analysis (Pool 2)**

Im Koordinatensystem ist der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 24 - \frac{1}{6}x^2$  dargestellt. Für jede Zahl  $x$  mit  $0 < x < 12$  wird ein Rechteck  $R_x$  durch die Eckpunkte  $(0|0)$ ,  $(x|0)$ ,  $(x|f(x))$  und  $(0|f(x))$  festgelegt.

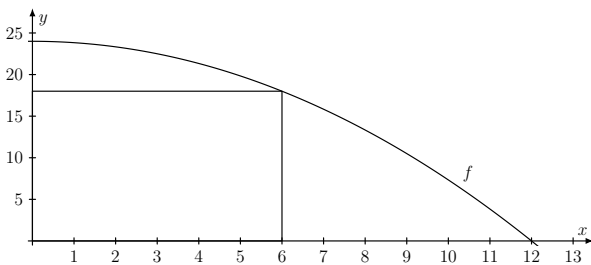


3.1 Zeichnen Sie das Rechteck  $R_6$  in das Koordinatensystem.

(1 P)

3.2 Unter allen Rechtecken  $R_x$  gibt es eines mit maximalem Flächeninhalt  $A(x) = x \cdot f(x)$ . Untersuchen Sie, ob für dieses Rechteck  $x < 7$  ist.

(4 P)

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analysis (Pool 2) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3.1                                                      |  <p style="text-align: right;">1 P</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 3.2                                                      | <p>Es ist <math>A(x) = x \cdot f(x) = 24x - \frac{1}{6}x^3</math>, also <math>A'(x) = 24 - \frac{1}{2}x^2</math>.<br/> Ist <math>A(x)</math> maximal, so gilt notwendigerweise<br/> <math>A'(x) = 0 \Leftrightarrow 24 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 48</math>.<br/> Mit <math>x &gt; 0</math> folgt <math>x = \sqrt{48}</math>. Diese Zahl ist kleiner als <math>\sqrt{49} = 7</math>.</p> <p style="text-align: right;">4 P</p> |

**Kernfach Mathematik**

**HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)**

Gegeben sind der Punkt  $P(6 | 3 | 7)$  und die Ebene  $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 11$ .

- 4.1 Geben Sie eine Gleichung der Gerade  $g$  an, die durch den Punkt  $P$  und senkrecht zu  $E$  verläuft.

(2 P)

Zusätzlich ist die Schar der Geraden  $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$  mit  $t \in \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$  gegeben.

- 4.2 Zeigen Sie, dass es genau einen Wert für  $a$  gibt, so dass die zugehörige Gerade  $g_a$  parallel zu  $E$  ist und nicht in  $E$  liegt.

(3 P)

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4.1                                                                   | $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$<br><div style="text-align: right;">2 P</div>                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 4.2                                                                   | <p>Es gilt <math>\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 + 1 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -2,5</math>.</p> <p>Daher ist nur <math>g_{-2,5}</math> parallel zu <math>E</math>.</p> <p>Da <math>2 \cdot 6 + 3 + 2 \cdot 7 = 29 \neq 11</math> ist, verläuft die Gerade <math>g_{-2,5}</math> nicht in <math>E</math>.</p> <div style="text-align: right;">3 P</div> |

**Kernfach Mathematik**

**HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)**

Wird der Punkt  $P(1|2|3)$  an der Ebene  $E$  gespiegelt, so ergibt sich der Punkt  $Q(7|2|11)$ .

5.1 Bestimmen Sie eine Gleichung von  $E$  in Koordinatenform.

(3 P)

5.2 Auf der Gerade durch  $P$  und  $Q$  liegen die Punkte  $R$  und  $S$  symmetrisch bezüglich  $E$ , dabei liegt  $R$  bezüglich  $E$  auf der gleichen Seite wie  $P$ . Der Abstand von  $R$  und  $S$  ist doppelt so groß wie der Abstand von  $P$  und  $Q$ .  
Bestimmen Sie die Koordinaten von  $R$ .

(2 P)

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5.1                                                                   | <p>Der Mittelpunkt von <math>\overline{PQ}</math> ergibt sich als <math>M(\frac{1+7}{2} \frac{2+2}{2} \frac{3+11}{2})</math>, d.h. <math>M(4 2 7)</math>.<br/> <math>\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}</math> ist ein Normalenvektor von <math>E</math>. Mit <math>6 \cdot 4 + 8 \cdot 7 = 80</math> ist <math>6x_1 + 8x_3 = 80</math><br/> eine Gleichung von <math>E</math> in Koordinatenform.</p> <p style="text-align: right;">3 P</p> |
| 5.2                                                                   | <p><math>\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}</math> bzw. <math>R(-2 2 -1)</math></p> <p style="text-align: right;">2 P</p>                                                                                                                                                                                                                                                    |

**Kernfach Mathematik**

**HMF 6 - Stochastik (Pool 1)**

In einem Unternehmen werden die Mitarbeitenden zu ihrem Arbeitsweg befragt. Zu den Ereignissen

$F$ : „Person kommt regelmäßig mit dem Fahrrad zur Arbeit“

$N$ : „Person wohnt nah an der Arbeitsstelle (in höchstens zehn Kilometern Entfernung)“

ergeben sich aus der Umfragestatistik die folgenden relativen Häufigkeiten:

|                |     |                |      |
|----------------|-----|----------------|------|
|                | $N$ | $\overline{N}$ |      |
| $F$            |     | 0,12           |      |
| $\overline{F}$ |     |                | 0,70 |
|                |     | 0,60           |      |

6.1 Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle.

(2 P)

6.2 Von allen befragten Personen wird eine zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P_{\overline{N}}(F)$  und geben Sie die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang an.

(3 P)

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Stochastik (Pool 1) |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |      |                |      |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|----------------|------|
| 6.1                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $N$  | $\overline{N}$ |      |
|                                                            | $F$                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,18 | 0,12           | 0,30 |
|                                                            | $\overline{F}$                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,22 | 0,48           | 0,70 |
|                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,40 | 0,60           |      |
|                                                            | 2 P                                                                                                                                                                                                                                                                                       |      |                |      |
| 6.2                                                        | $P_{\overline{N}}(F) = \frac{P(\overline{N} \cap F)}{P(\overline{N})} = \frac{0,12}{0,60} = 0,2$ <p>Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig ausgewählte Person regelmäßig mit dem Fahrrad zur Arbeit kommt, falls sie nicht nah an der Arbeitsstelle wohnt.</p> <div>3 P</div> |      |                |      |

**Kernfach Mathematik**

**HMF 7 - Stochastik (Pool 1)**

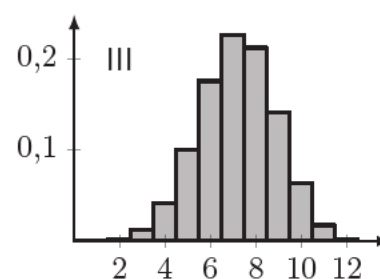
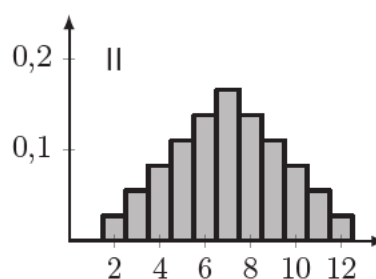
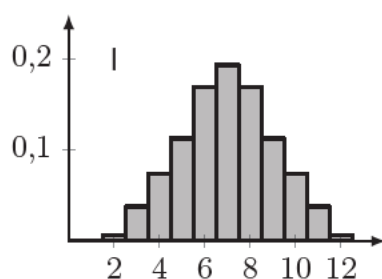
Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$ :

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen.  $X$  gibt die dabei erzielte Augensumme an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.  $Y$  gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

7.1 Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit  $P(X = 4)$  mit der Wahrscheinlichkeit  $P(X = 10)$  übereinstimmt.

(2 P)

7.2 Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von  $X$  und  $Y$  werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt.



Ordnen Sie  $X$  und  $Y$  jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

(3 P)

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7.1                                                        | <p><math>X = 4</math> enthält genau die Ergebnisse (1,3), (2,2), (3,1), und <math>X = 10</math> enthält genau (4,6), (5,5), (6,4). Daher sind die Ereignisse gleich wahrscheinlich.</p> <p style="text-align: right;">2 P</p>                                                                                                                                                                    |
| 7.2                                                        | <p>Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung von <math>Y</math> asymmetrisch ist, kommt dafür nur das Diagramm III infrage.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit <math>P(X = 3)</math> ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit <math>P(X = 2)</math>. Folglich wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung von <math>X</math> durch das Diagramm II dargestellt.</p> <p style="text-align: right;">3 P</p> |

**Kernfach Mathematik**

---

**HMF 8 - Stochastik (Pool 2)**

Für ein Spiel wird ein Behälter mit 100 Kugeln gefüllt. Dafür stehen rote und blaue Kugeln zur Verfügung. Vor jedem Spiel legt der Spieler die Anzahl der blauen Kugeln im Behälter fest. Anschließend wird dem Behälter eine Kugel zufällig entnommen. Ist diese Kugel rot, so wird dem Spieler die festgelegte Anzahl blauer Kugeln in Cent ausgezahlt; ist die Kugel blau, so beträgt die Auszahlung 10 Cent.

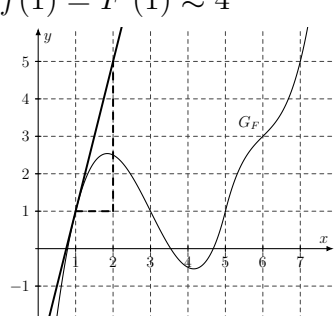
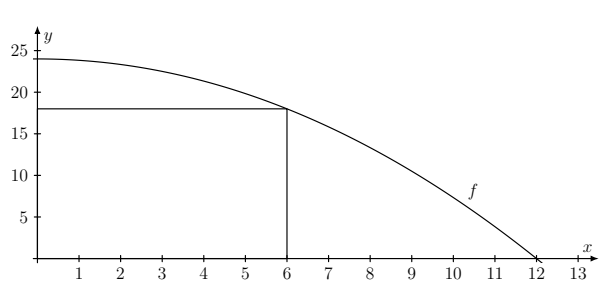
Ermitteln Sie, wie der Spieler die Anzahl blauer Kugeln für ein Spiel festlegen muss, damit der Erwartungswert der Auszahlung möglichst groß ist.

(5 P)

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 8.                                                         | <p>Bezeichnet man die festgelegte Anzahl blauer Kugeln mit <math>b</math>, so kann der Erwartungswert der Auszahlung in Cent mit dem Term</p> $\frac{100-b}{100} \cdot b + \frac{b}{100} \cdot 10 = -\frac{1}{100} \cdot b \cdot (b-110)$ <p>berechnet werden. Stellt man diesen Term grafisch dar, so ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel, die die <math>b</math>-Achse bei 0 und 110 schneidet. Der Spieler muss sich also für 55 blaue Kugeln entscheiden.</p> <p style="text-align: right;">5 P</p> |

**Kernfach Mathematik**

**HMF-Bewertungsbogen für:** \_\_\_\_\_

| Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.1                                                      | $f(2) = 4, f'(2) = 0$<br>2 P                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 1.2                                                      | Mit $f''(x) = 2x - 6$ und $f'''(x) = 2$ folgen $f''(3) = 0$ und $f'''(3) \neq 0$ . Damit ist 3 eine Wendestelle von $f$ .<br>3 P                                                                                                                                                                                        |
| Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 2.1                                                      | $\int_1^7 f(x) dx = F(7) - F(1) = 5 - 1 = 4$<br>2 P                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 2.2                                                      | $f(1) = F'(1) \approx 4$<br><br>3 P                                                                                                                                                                                                   |
| Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analysis (Pool 2) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 3.1                                                      | <br>1 P                                                                                                                                                                                                                              |
| 3.2                                                      | Es ist $A(x) = x \cdot f(x) = 24x - \frac{1}{6}x^3$ , also $A'(x) = 24 - \frac{1}{2}x^2$ .<br>Ist $A(x)$ maximal, so gilt notwendigerweise<br>$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 24 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 48$ .<br>Mit $x > 0$ folgt $x = \sqrt{48}$ . Diese Zahl ist kleiner als $\sqrt{49} = 7$ .<br>4 P |

**Kernfach Mathematik**

|                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------|--|-----|----------------|--|-----|------|------|------|----------------|------|------|------|--|------|------|--|
|                | Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)                                                                                                                                                                                                                                                                    |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
| 4.1            | $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                            |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | 2 P                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
| 4.2            | Es gilt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 + 1 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -2,5$ .<br>Daher ist nur $g_{-2,5}$ parallel zu $E$ .<br>Da $2 \cdot 6 + 3 + 2 \cdot 7 = 29 \neq 11$ ist, verläuft die Gerade $g_{-2,5}$ nicht in $E$ .                        |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | 3 P                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)                                                                                                                                                                                                                                                                    |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
| 5.1            | Der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ergibt sich als $M(\frac{1+7}{2}   \frac{2+2}{2}   \frac{3+11}{2})$ , d.h. $M(4   2   7)$ .<br>$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von $E$ . Mit $6 \cdot 4 + 8 \cdot 7 = 80$ ist $6x_1 + 8x_3 = 80$ eine Gleichung von $E$ in Koordinatenform. |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | 3 P                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
| 5.2            | $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $R(-2   2   -1)$                                                                                                                                                                                  |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | 2 P                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Stochastik (Pool 1)                                                                                                                                                                                                                                                                               |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
| 6.1            | <table><tr><td></td><td><math>N</math></td><td><math>\overline{N}</math></td><td></td></tr><tr><td><math>F</math></td><td>0,18</td><td>0,12</td><td>0,30</td></tr><tr><td><math>\overline{F}</math></td><td>0,22</td><td>0,48</td><td>0,70</td></tr><tr><td></td><td>0,40</td><td>0,60</td><td></td></tr></table>                        |                |      |  | $N$ | $\overline{N}$ |  | $F$ | 0,18 | 0,12 | 0,30 | $\overline{F}$ | 0,22 | 0,48 | 0,70 |  | 0,40 | 0,60 |  |
|                | $N$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\overline{N}$ |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
| $F$            | 0,18                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,12           | 0,30 |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
| $\overline{F}$ | 0,22                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,48           | 0,70 |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | 0,40                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,60           |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | 2 P                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
| 6.2            | $P_{\overline{N}}(F) = \frac{P(\overline{N} \cap F)}{P(\overline{N})} = \frac{0,12}{0,60} = 0,2$<br>Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig ausgewählte Person regelmäßig mit dem Fahrrad zur Arbeit kommt, falls sie nicht nah an der Arbeitsstelle wohnt.                                                                   |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |
|                | 3 P                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                |      |  |     |                |  |     |      |      |      |                |      |      |      |  |      |      |  |

**Kernfach Mathematik**

|     | Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7.1 | <p><math>X = 4</math> enthält genau die Ergebnisse <math>(1,3)</math>, <math>(2,2)</math>, <math>(3,1)</math>, und <math>X = 10</math> enthält genau <math>(4,6)</math>, <math>(5,5)</math>, <math>(6,4)</math>. Daher sind die Ereignisse gleich wahrscheinlich.</p> <p style="text-align: right;">2 P</p>                                                                                                                                                                                                           |
| 7.2 | <p>Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung von <math>Y</math> asymmetrisch ist, kommt dafür nur das Diagramm III infrage.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit <math>P(X = 3)</math> ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit <math>P(X = 2)</math>. Folglich wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung von <math>X</math> durch das Diagramm II dargestellt.</p> <p style="text-align: right;">3 P</p>                                                                                                                      |
|     | Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 8.  | <p>Bezeichnet man die festgelegte Anzahl blauer Kugeln mit <math>b</math>, so kann der Erwartungswert der Auszahlung in Cent mit dem Term</p> $\frac{100 - b}{100} \cdot b + \frac{b}{100} \cdot 10 = -\frac{1}{100} \cdot b \cdot (b - 110)$ <p>berechnet werden. Stellt man diesen Term grafisch dar, so ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel, die die <math>b</math>-Achse bei 0 und 110 schneidet. Der Spieler muss sich also für 55 blaue Kugeln entscheiden.</p> <p style="text-align: right;">5 P</p> |

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: \_\_\_\_\_

Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: \_\_\_\_\_

**Kernfach Mathematik**

**Aufgabe 1: Analysis-CAS**

Gegeben ist die Schar der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2} a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Die zugehörigen Graphen sind symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

a) Zunächst werden einzelne Funktionen der Schar betrachtet.

- a1) Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von  $f_1$ . (4 P)
- a2) Weisen Sie nach, dass  $f_1$  genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von  $f_1$  für  $x \rightarrow +\infty$  an. (2 P)
- a3) Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von  $f_1$  ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem. Ergänzen Sie die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. (2 P)

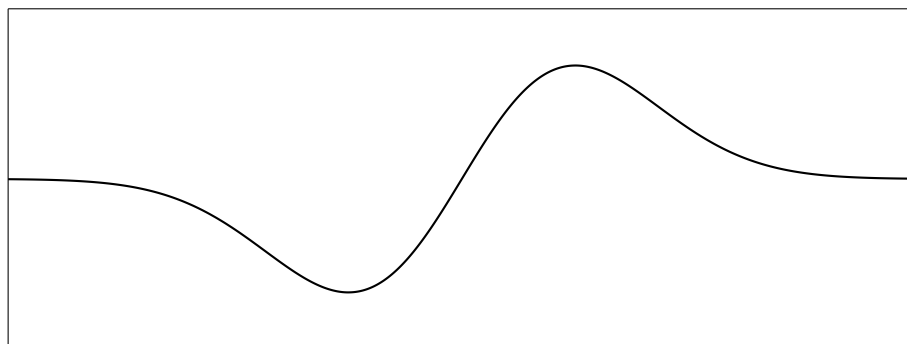


Abbildung 1

a4) Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:

Für jede Stammfunktion  $F_1$  von  $f_1$  und für jede reelle Zahl  $u > 2022$  gilt

$$F_1(u) - F_1(0) \approx \int_0^{2022} f_1(x) dx. \quad (3 \text{ P})$$

- a5) Der Graph von  $f_0$  ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der  $y$ -Achse an. (2 P)
- a6) Für einen Wert von  $a$  liegt der Punkt  $P(1 | e)$  auf dem Graphen von  $f_a$ . Berechnen Sie für diesen Wert von  $a$  die Größe des Winkels, den der Graph von  $f_a$  mit der Parallele zur  $x$ -Achse durch den Punkt  $P$  einschließt. (4 P)

a7) Begründen Sie unter Verwendung der Abbildung 2, dass

$$\int_{-0,5}^1 f_{-1}(x) dx = \int_{0,5}^1 f_{-1}(x) dx \quad \text{gilt.}$$

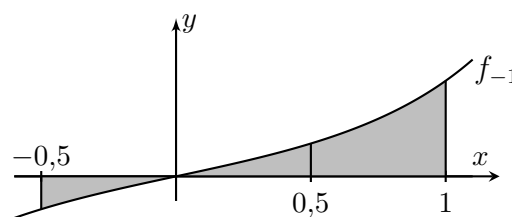


Abbildung 2

(2 P)

**Kernfach Mathematik**

---

Nun werden alle Funktionen der gegebenen Schar betrachtet.

b)b1) Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen  $a$ ,  $a_1$  und  $a_2$ :

- $f_a(0) = 0$
- $f'_a(0) = f'_0(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \vee x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt. (3 P)

b2) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für jeden Wert von  $a$  richtig ist:

*Wird der Graph von  $f_a$  mit dem gleichen Faktor  $k > 0$  sowohl in  $x$ -Richtung als auch in  $y$ -Richtung gestreckt, so stellt der dadurch entstehende Graph ebenfalls eine Funktion der Schar dar.* (3 P)

b3) Für jedes  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sind die Wendestellen von  $f_a$  genau die Lösungen der Gleichung  $(a \cdot x^2 - 3) \cdot x = 0$ .

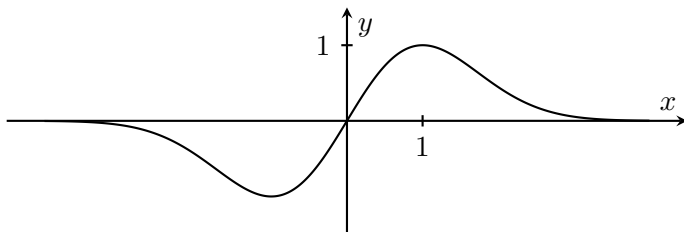
Geben Sie für alle Werte von  $a \in \mathbb{R}$  die Anzahl der Wendestellen von  $f_a$  an und begründen Sie Ihre Angabe. (5 P)

c)c1) Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte der Graphen der Schar auf der Gerade mit der Gleichung  $y = x$  liegen. (5 P)

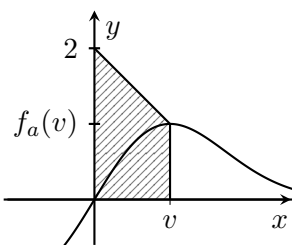
c2) Für jeden positiven Wert von  $a$  bilden der Hochpunkt  $(v | f_a(v))$  des Graphen von  $f_a$ , der Punkt  $(0 | 2)$ , der Koordinatenursprung und der Punkt  $(v | 0)$  die Eckpunkte eines Vierecks.

Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von  $a$ , für den das Viereck den Flächeninhalt 144 hat. (5 P)

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Bewertung<br>Zuordnung |    |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | I                      | II | III |
| <b>Teilaufgabe a)</b><br>Notwendig für eine lokale Extremstelle $x$ von $f_1$ ist $f'_1(x) = 0$ .<br>Es gilt $f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$ .<br>Mit $f''_1(1) = -2 < 0$ und $f_1(1) = 1$ folgt, dass der Graph von $f_1$ den<br>Hochpunkt $H$ mit den Koordinaten $(1   1)$ besitzt.      | 2                      |    |     |
| Aus $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ folgt, dass $f_1$ genau eine Nullstelle hat.<br>Es ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$ .                                                                                                                                                                   | 2                      |    |     |
|                                                                                                                                                                                                                           | 2                      |    |     |
| Für jede reelle Zahl $u > 2022$ stimmt der Inhalt des Flächenstückes zwischen<br>dem Graphen von $f_1$ und der $x$ -Achse über dem Intervall $[0; u]$ ungefähr<br>mit dem Inhalt des Flächenstückes überein, das zwischen dem Graphen<br>von $f_1$ und der $x$ -Achse über dem Intervall $[0; 2022]$ liegt. |                        | 3  |     |
| Die Steigung ist $e^{\frac{1}{2}}$ .<br>Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $(0   0)$ .                                                                                                                                                                                                                    | 1                      |    |     |
| $f_a(1) = e \Leftrightarrow a = -1$<br>Für die Größe des Winkels $\varphi$ gilt $\tan(\varphi) = f'_{-1}(1) = 2e$ , also folgt $\varphi \approx 80^\circ$ .                                                                                                                                                 | 1                      |    |     |
| Da die beiden Flächenstücke zwischen dem Graph von $f_{-1}$ und der $x$ -Achse<br>über dem Intervall $[-0,5; 0]$ bzw. $[0; 0,5]$ gleich groß und unterschiedlich<br>orientiert sind, ist $\int_{-0,5}^{0,5} f_{-1}(x) dx = 0$ .                                                                             | 2                      |    |     |
| <b>Teilaufgabe b)</b><br>Alle Graphen der Schar verlaufen durch den Koordinatenursprung.<br>An der Stelle $x = 0$ besitzen alle Graphen der Schar dieselbe Steigung.<br>Je zwei verschiedene Graphen der Schar schneiden sich nur an der Stelle<br>$x = 0$ .                                                |                        | 1  |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                        | 1  |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                        | 1  |     |

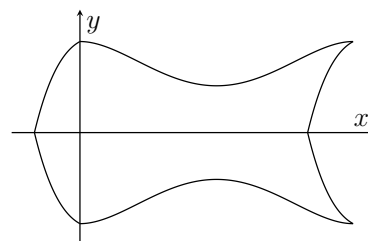
**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Bewertung Zuordnung |    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | I                   | II | III |
| <p>Wird der Graph der Funktion <math>f_a</math> mit dem Faktor <math>k &gt; 0</math> in <math>x</math>- und <math>y</math>-Richtung gestreckt, ergibt sich der zugehörige Funktionsterm durch</p> $k \cdot f_a\left(\frac{1}{k} \cdot x\right) = x \cdot e^{-\frac{a \cdot x^2}{2 \cdot k^2} + \frac{1}{2}} = f_{\frac{a}{k^2}}(x).$ <p>Der entsprechende Graph stellt die Funktion <math>f_{\frac{a}{k^2}}</math> der Schar dar.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                     |    | 3   |
| <p>Für <math>a = 0</math> ist der Graph von <math>f_a</math> eine Gerade, also hat <math>f_a</math> keine Wendestelle.<br/>Für <math>a \neq 0</math> gilt <math>(a \cdot x^2 - 3) \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = \frac{3}{a}</math>.<br/>Damit ergibt sich:<br/>Für <math>a &lt; 0</math> hat die vorgegebene Gleichung genau eine Lösung, also hat <math>f_a</math> genau eine Wendestelle.<br/>Für <math>a &gt; 0</math> hat die vorgegebene Gleichung genau drei Lösungen, also hat <math>f_a</math> genau drei Wendestellen.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                     | 1  |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                     | 4  |     |
| <p><b>Teilaufgabe c)</b><br/>Notwendig für eine lokale Extremstelle <math>x</math> von <math>f_a</math> ist <math>f'_a(x) = 0</math>.<br/>Lösungen existieren nur für <math>a &gt; 0</math>:<br/><math>f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{\sqrt{a}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{a}}</math><br/>Da zusätzlich <math>f''_a\left(\frac{-1}{\sqrt{a}}\right) = 2\sqrt{a} &gt; 0</math> und <math>f''_a\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = -2\sqrt{a} &lt; 0</math> gilt, liegt an der Stelle <math>\frac{-1}{\sqrt{a}}</math> der einzige Tiefpunkt des Graphen der Funktion <math>f_a</math> und an der Stelle <math>\frac{1}{\sqrt{a}}</math> der einzige Hochpunkt des Graphen der Funktion <math>f_a</math> vor.<br/>Da <math>f_a\left(\frac{-1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{a}}</math> und <math>f_a\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}</math> gilt, stimmen die <math>x</math>-Koordinate und <math>y</math>-Koordinate jedes Extrempunktes jeweils überein. Somit liegen die Extrempunkte aller Graphen der Funktionen <math>f_a</math> auf der Gerade mit der Gleichung <math>y = x</math>.</p> |                     | 3  |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                     |    | 2   |
|  <p><i>Die Skizze kann auch für <math>2 &lt; f_a(v)</math> erstellt werden.</i></p> <p>Das beschriebene Flächenstück ist ein Trapez mit dem Flächeninhalt <math>A = \frac{1}{2} \cdot (2 + f_a(v)) \cdot v</math>.<br/>Da der Hochpunkt die Koordinaten <math>(v   v)</math> hat, gilt <math>f_a(v) = v</math>.<br/>Damit folgt für <math>a &gt; 0</math> aus <math>\frac{1}{2} \cdot (2 + f_a(v)) \cdot v = 144 \wedge f_a(v) = v</math>, dass <math>a = \frac{1}{256}</math> ist.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                     |    | 2   |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                     |    | 3   |
| Punktsummen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 12                  | 18 | 10  |

**Kernfach Mathematik**

**Aufgabe 2: Analysis-CAS**

Eine dekorativ geschwungene Gehwegplatte wird untersucht. Wird die Gehwegplatte von oben betrachtet, hat sie die in der Abbildung dargestellte Form. Diese Form ist symmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse des eingezeichneten Koordinatensystems.



Der obere Rand der Form wird beschrieben mithilfe des Graphen der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = -\frac{3}{250} \cdot x^4 + \frac{18}{125} \cdot x^3 - \frac{54}{125} \cdot x^2 + 2 \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq 6.$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Wirklichkeit.

- a) a1) Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes des Graphen von  $f$ . (4 P)
- a2) Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  in die Abbildung 1 auf dem Beiblatt. (3 P)
- a3) Die Breite der Form an jeder Stelle  $x$  mit  $x \in [0; 6]$  ist  $2 \cdot f(x)$ . Es gibt zwei Stellen  $x \in [0; 6]$ , an denen die Form eine Breite von 3 Längeneinheiten aufweist. Bestimmen Sie den Abstand dieser beiden Stellen voneinander. (3 P)

Der linke Rand der Form wird oberhalb der  $x$ -Achse modelliert mithilfe des Graphen der Funktion  $l$  mit

$$l(x) = 2 \cdot (x + 1) \cdot e^{-0,73 \cdot x} \quad \text{und} \quad -1 \leq x \leq 0.$$

- b) Der rechte Rand der Form wird mithilfe einer Funktion  $r$  modelliert. Der Graph von  $r$  ergibt sich durch eine Verschiebung des Graphen von  $l$  entlang der  $x$ -Achse und ist über dem Intervall  $[5; 6]$  in der Abbildung 1 auf dem Beiblatt dargestellt.
- b1) Leiten Sie einen Funktionsterm von  $r$  her. (2 P)
- b2) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt der Form mit dem Term  $2 \cdot \int_0^6 f(x) \, dx$  berechnet werden kann. (3 P)
- b3) Ein Kubikdezimeter des zur Herstellung der Gehwegplatten verwendeten Materials hat eine Masse von 1,76 kg. Berechnen Sie die Masse einer Gehwegplatte mit einer Plattendicke von einem halben Dezimeter. (4 P)
- b4) Die Bogenlänge  $L$  des Graphen einer differenzierbaren Funktion  $h$  über einem Intervall  $[a; b]$  lässt sich berechnen durch  $L = \int_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2} \, dx$ . Berechnen Sie mithilfe dieser Formel den Umfang der Form. (4 P)

**Kernfach Mathematik**

---

- c) c1) Der linke und der obere Rand der Form treffen im Punkt  $(0|2)$  in einem Winkel  $\alpha$  aufeinander. Die Situation ist in der Abbildung 2 auf dem Beiblatt dargestellt.  
Berechnen Sie  $\alpha$ . (3 P)

- c2) Die Gerade  $g$  verläuft durch den Punkt  $P(0|2)$  und ist orthogonal zur Tangente an den Graphen von  $l$  im Punkt  $P$ .  
Berechnen Sie den Schnittpunkt von  $g$  mit der  $x$ -Achse. (4 P)

- d) Betrachtet wird nun die Schar der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f_k$  mit

$$f_k(x) = -\frac{1}{100} k \cdot x^4 + \frac{3}{25} k \cdot x^3 - \frac{9}{25} k \cdot x^2 + 2 \quad \text{und} \quad k \neq 0.$$

- d1) Berechnen Sie den Wert  $k$ , für den  $f_k(x) = f(x)$  ist. (2 P)

- d2) Bestimmen Sie für jedes  $k \neq 0$  die Wendestellen von  $f_k$ .

[Kontrolle:  $x = -\sqrt{3} + 3 \vee x = \sqrt{3} + 3$ ] (4 P)

- d3) Die Wendepunkte der Graphen der Funktionen  $f_k$  liegen oberhalb, unterhalb bzw. auf der  $x$ -Achse.  
Untersuchen Sie diesbezüglich die Lage der Wendepunkte in Abhängigkeit von  $k$ . (4 P)

**Kernfach Mathematik**

**Beiblatt**

zu den Teilaufgaben a2), b1) und c1)

Abbildung 1:

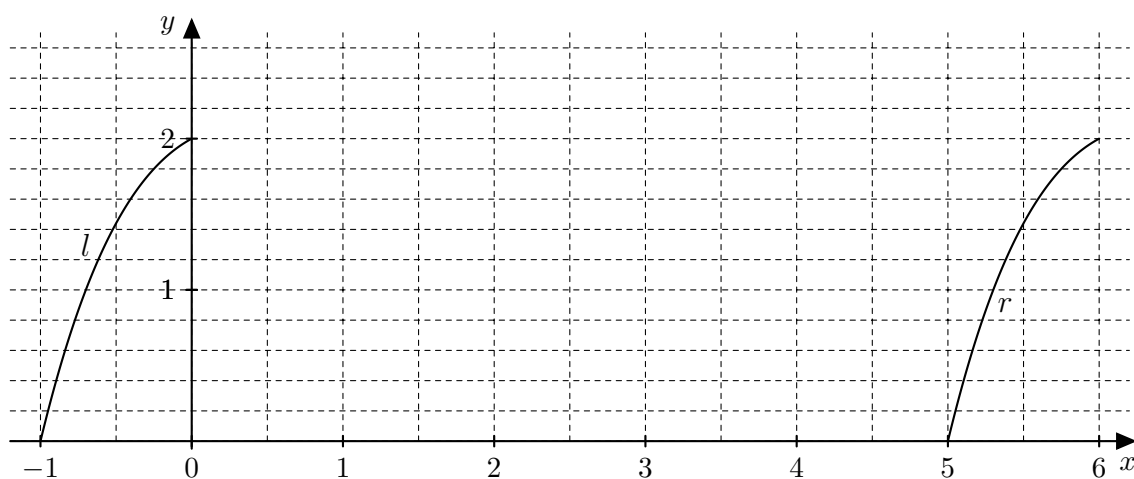
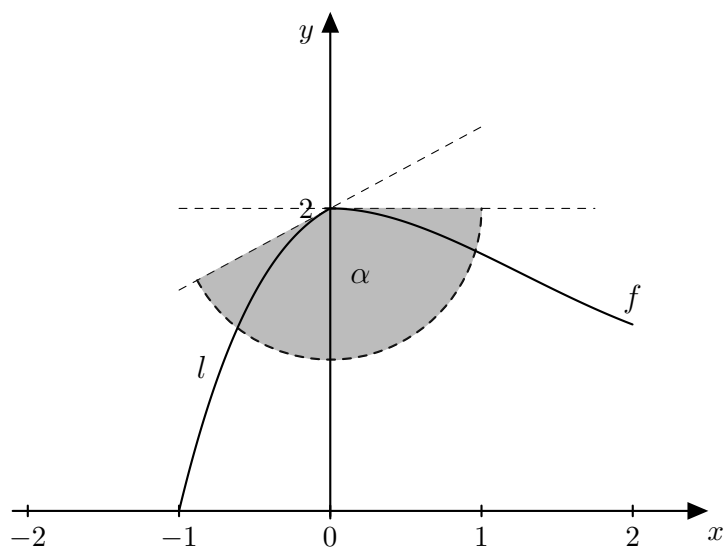


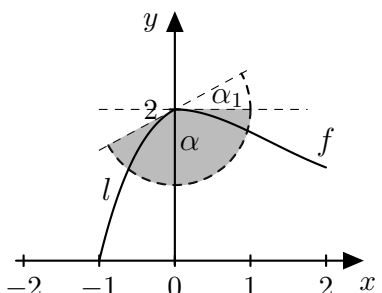
Abbildung 2:



**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Bewertung<br>Zuordnung |    |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | I                      | II | III |
| <b>Teilaufgabe a)</b><br>Notwendig für eine Extremstelle $x$ mit $0 < x < 6$ von $f$ ist $f'(x) = 0$ .<br>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = 6$<br>Da zusätzlich $f''(3) = \frac{54}{125} > 0$ und $f(3) = 1,028$ gilt, ist an der Stelle 3 der Tiefpunkt mit den Koordinaten $(3   1,028)$ .                                 | 2                      |    |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3                      |    |     |
| $2 \cdot f(x) = 3$ ergibt $x \approx 1,4047 \vee x \approx 4,5953$ .<br>Wegen $4,5953 - 1,4047 = 3,1906$ liegen die Stellen etwa 3,19 Längeneinheiten voneinander entfernt.                                                                                                                                                                     | 3                      |    |     |
| <b>Teilaufgabe b)</b><br>Der Graph von $r$ ergibt sich durch eine Verschiebung des Graphen von $l$ um 6 Längeneinheiten nach rechts, so dass<br>$r(x) = l(x - 6) = 2 \cdot (x - 5) \cdot e^{-0,73 \cdot (x-6)}$ gilt.                                                                                                                           |                        |    | 2   |
| Da der Graph von $r$ durch eine Verschiebung des Graphen von $l$ entstanden ist, gilt $\int_{-1}^0 l(x) dx = \int_5^6 r(x) dx$ .<br>Aufgrund der Symmetrie der Form bezüglich der $x$ -Achse gilt für ihren Flächeninhalt<br>$A = 2 \cdot \left( \int_{-1}^0 l(x) dx + \int_0^6 f(x) dx - \int_5^6 r(x) dx \right) = 2 \cdot \int_0^6 f(x) dx.$ |                        | 3  |     |
| Mit $A = 2 \cdot \int_0^6 f(x) dx \approx 17,78$ gilt für das Volumen der Gehwegplatte<br>$V \approx 17,78 \text{ dm}^2 \cdot 0,5 \text{ dm} = 8,89 \text{ dm}^3$ .<br>Die Masse ist dann $8,89 \text{ dm}^3 \cdot 1,76 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \approx 15,65 \text{ kg}$ .                                                               |                        | 4  |     |
| Mithilfe der Formel ergibt sich für den Umfang $U$ der Form<br>$U = 2 \cdot \left( \int_{-1}^0 \sqrt{1 + (l'(x))^2} dx + \int_0^6 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx + \int_5^6 \sqrt{1 + (r'(x))^2} dx \right)$<br>$\approx 21,89$ .                                                                                                                      |                        | 4  |     |

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Bewertung<br>Zuordnung |    |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | I                      | II | III |
| <b>Teilaufgabe c)</b><br> <p>Mit <math>f'(0) = 0</math> und <math>l'(0) = \tan(\alpha_1)</math> folgt<br/> <math>\alpha = 180^\circ - \alpha_1 = 180^\circ - \arctan(l'(0)) = 180^\circ - \arctan(\frac{27}{50}) \approx 151,63^\circ</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                        |    |     |
| <p>Die Gerade <math>g</math> kann durch die Gleichung<br/> <math>g(x) = -\frac{1}{l'(0)} \cdot x + l(0) = -\frac{50}{27} \cdot x + 2</math> beschrieben werden.<br/> Für die Schnittstelle mit der <math>x</math>-Achse gilt dann <math>g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{27}{25}</math>.<br/> Der Schnittpunkt von <math>g</math> mit der <math>x</math>-Achse hat damit die Koordinaten <math>(\frac{27}{25}   0)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                        |    | 4   |
| <b>Teilaufgabe d)</b><br>$f(x) = f_k(x) \Leftrightarrow k = 1,2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2                      |    |     |
| <p>Notwendig für eine Wendestelle <math>x</math> von <math>f_k</math> ist <math>f_k''(x) = 0</math>.<br/> <math>f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} + 3 \vee x = \sqrt{3} + 3</math><br/> Da zusätzlich <math>f_k'''(-\sqrt{3} + 3) = \frac{6 \cdot k \cdot \sqrt{3}}{25} \neq 0</math> und <math>f_k'''(\sqrt{3} + 3) = \frac{-6 \cdot k \cdot \sqrt{3}}{25} \neq 0</math> gilt, sind die Stellen <math>-\sqrt{3} + 3</math> und <math>\sqrt{3} + 3</math> Wendestellen von <math>f_k</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                           |                        | 2  |     |
| <p>Mit <math>f_k(-\sqrt{3} + 3) = 2 - \frac{9 \cdot k}{25} = f_k(\sqrt{3} + 3)</math> haben die Wendepunkte die Koordinaten <math>(-\sqrt{3} + 3   2 - \frac{9 \cdot k}{25})</math> und <math>(\sqrt{3} + 3   2 - \frac{9 \cdot k}{25})</math>.<br/> Da <math>2 - \frac{9 \cdot k}{25} &lt; 0 \Leftrightarrow k &gt; \frac{50}{9}</math> gilt, liegen beide Wendepunkte des Graphen von <math>f_k</math> für <math>k &gt; \frac{50}{9}</math> unterhalb der <math>x</math>-Achse.<br/> Da <math>2 - \frac{9 \cdot k}{25} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{50}{9}</math> gilt, liegen beide Wendepunkte des Graphen von <math>f_k</math> für <math>k = \frac{50}{9}</math> auf der <math>x</math>-Achse und für <math>k &lt; \frac{50}{9}</math> oberhalb der <math>x</math>-Achse.</p> |                        |    | 4   |
| Punktsummen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 12                     | 18 | 10  |

**Kernfach Mathematik**

**Aufgabe 1: Analysis**

Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$ .

Der Graph von  $f$  ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

Die Abbildung 1 zeigt diesen Graphen ohne das zugrunde liegende Koordinatensystem.

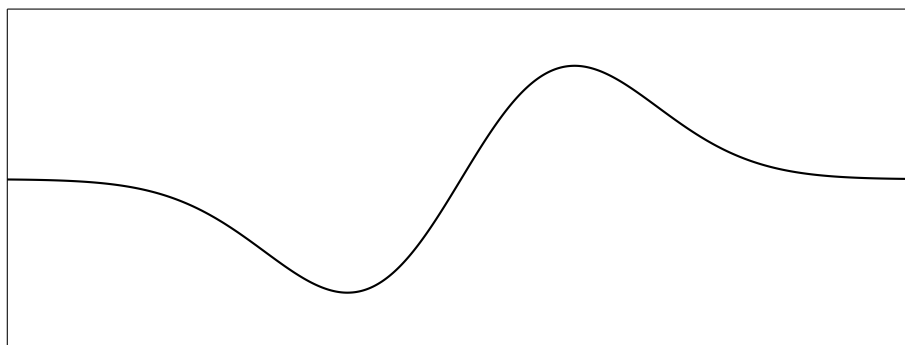


Abbildung 1

- a) a1) Berechnen Sie den Funktionswert  $f(1)$  sowie die mittlere Steigung des Graphen von  $f$  über dem Intervall  $[0; 1]$ . (3 P)
- a2) Prüfen Sie, ob der Punkt  $(0,5 | 0,5)$  auf dem Graphen von  $f$  liegt. (2 P)
- a3) Begründen Sie, dass  $f$  genau eine Nullstelle hat, und geben Sie den Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow +\infty$  an. (2 P)
- a4) Zeigen Sie, dass  $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$  ein Term der ersten Ableitungsfunktion  $f'$  von  $f$  ist. (3 P)
- a5) Untersuchen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von  $f$ . (4 P)
- a6) Ergänzen Sie in der Abbildung 1 die Koordinatenachsen und skalieren Sie diese passend. (2 P)
- b) Interpretieren Sie den folgenden Sachverhalt geometrisch:

Für jede Stammfunktion  $F$  von  $f$  und für jede reelle Zahl  $w > 2022$  gilt

$$F(w) - F(0) \approx \int_0^{2022} f(x) \, dx. \quad (3 \text{ P})$$

Betrachtet wird nun die Schar der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $f_a$  mit  $f_a(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}a \cdot x^2 + \frac{1}{2}}$  und  $a \in \mathbb{R}$ .

- c) c1) Zeigen Sie, dass genau ein Graph der Schar den Punkt  $(1 | 1)$  enthält, und geben Sie den zugehörigen Wert von  $a$  an. (3 P)

**Kernfach Mathematik**

---

c2) Der Graph der Funktion  $f_0$  ist eine Gerade. Geben Sie die Steigung dieser Gerade und die Koordinaten ihres Schnittpunkts mit der  $y$ -Achse an. (2 P)

c3) Die folgenden Aussagen gelten für alle reellen Zahlen  $a$ ,  $a_1$  und  $a_2$ :

- $f_a(0) = 0$
- $f'_a(0) = f'_0(0)$
- $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \vee x = 0$

Geben Sie an, was sich aus diesen Aussagen hinsichtlich des Verlaufs der Graphen der Schar folgern lässt. (3 P)

Die Graphen der Schar lassen sich in die beiden folgenden Gruppen I und II einteilen:

- I Der Graph hat genau zwei Extrempunkte.
- II Der Graph hat keine Extrempunkte.

Die Abbildung 2 zeigt einen Graphen der Gruppe I, die Abbildung 3 einen Graphen der Gruppe II.

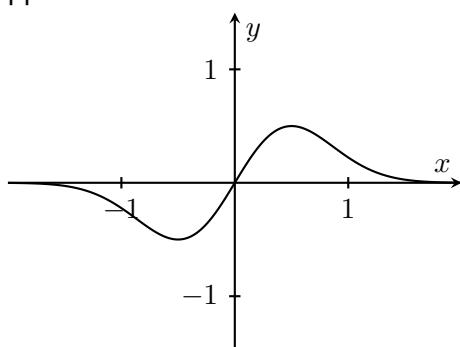


Abbildung 2

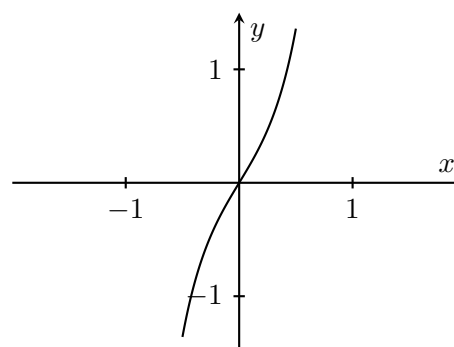


Abbildung 3

d) Die Extremstellen von  $f_a$  sind genau die Lösungen der Gleichung  $a \cdot x^2 = 1$ .

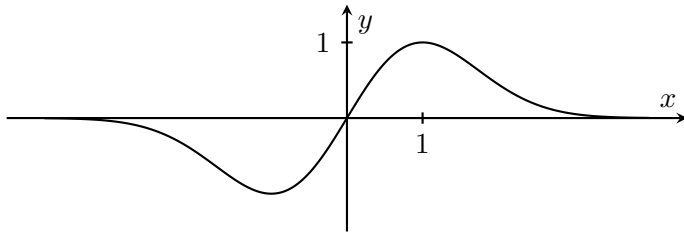
d1) Geben Sie zu den beiden Gruppen I und II jeweils alle zugehörigen Werte von  $a$  an und begründen Sie Ihre Angabe. (3 P)

d2) Zeigen Sie, dass alle Extrempunkte der Graphen der Schar auf der Gerade mit der Gleichung  $y = x$  liegen. (4 P)

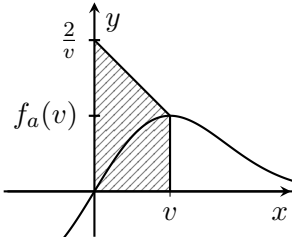
d3) Für jeden positiven Wert von  $a$  bilden der Hochpunkt  $(v \mid f_a(v))$  des Graphen von  $f_a$ , der Punkt  $(0 \mid \frac{2}{v})$ , der Koordinatenursprung und der Punkt  $(v \mid 0)$  die Eckpunkte eines Vierecks.

Bestimmen Sie ausgehend von einer geeigneten Skizze denjenigen Wert von  $a$ , für den das Viereck den Flächeninhalt 49 hat. (6 P)

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Bewertung Zuordnung |    |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | I                   | II | III |
| <b>Teilaufgabe a)</b><br>$f(1) = 1$<br>Die mittlere Steigung ist $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1<br>2              |    |     |
| Da $f(0,5) \approx 0,73 \neq 0,5$ gilt, liegt $(0,5   0,5)$ nicht auf dem Graphen von $f$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2                   |    |     |
| Wegen $e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Daher existiert genau eine Nullstelle.<br>Es ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1                   | 1  |     |
| $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$ $= e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} - x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$ $= (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2<br>1              |    |     |
| Wegen $e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt<br>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$ .<br>Wegen $e^{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:<br>Sowohl für $x < -1$ als auch für $x > 1$ ist $1 - x^2 < 0$ und folglich $f'(x) < 0$ .<br>Daher ist die Funktion hier streng monoton fallend.<br>Für $-1 < x < 1$ gilt $1 - x^2 > 0$ und folglich $f'(x) > 0$ . Somit ist die Funktion hier streng monoton wachsend.<br><i>Strenge Monotonie liegt sogar für <math>x \leq -1</math>, <math>x \geq 1</math> bzw. <math>-1 \leq x \leq 1</math> vor.</i> |                     | 4  |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                     | 2  |     |
| <b>Teilaufgabe b)</b><br>Für jede reelle Zahl $w > 2022$ stimmt der Inhalt des Flächenstückes zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$ -Achse über dem Intervall $[0; w]$ ungefähr mit dem Inhalt des Flächenstückes überein, das zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$ -Achse über dem Intervall $[0; 2022]$ liegt.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                     | 3  |     |
| <b>Teilaufgabe c)</b><br>Der Graph der Funktion $f_a$ enthält den Punkt $(1   1)$ genau dann, wenn $1 = f_a(1)$ gilt.<br>Da $1 = e^{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = 1$ , ist dies nur für $f_1$ der Fall.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1                   | 2  |     |

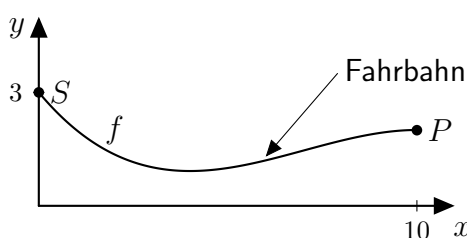
**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Bewertung Zuordnung |             |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|-------------|--------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | I                   | II          | III    |
| Die Steigung ist $e^{\frac{1}{2}}$ .<br>Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $(0   0)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1<br>1              |             |        |
| Alle Graphen der Schar verlaufen durch den Koordinatenursprung.<br>An der Stelle $x = 0$ besitzen alle Graphen der Schar dieselbe Steigung.<br>Je zwei verschiedene Graphen der Schar schneiden sich nur an der Stelle $x = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                     | 1<br>1<br>1 |        |
| <b>Teilaufgabe d)</b><br>Die Gleichung $a \cdot x^2 = 1$ besitzt genau dann zwei Lösungen, wenn $a > 0$ ist. Falls $a \leq 0$ ist, besitzt die Gleichung keine Lösung.<br>Somit gehören zur Gruppe I die Werte $a > 0$ und zur Gruppe II die Werte $a \leq 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                     | 3           |        |
| Ein Extrempunkt $(x   y)$ des Graphen von $f_a$ erfüllt $a \cdot x^2 = 1$ . Daher gilt $x \neq 0$ . Weiterhin ist $a \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{x^2}$ .<br>Damit gilt $y = f_{\frac{1}{x^2}}(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^2 + \frac{1}{2}} = x \cdot e^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = x$ .<br>Somit liegen alle Extrempunkte auf der Geraden mit der Gleichung $y = x$ .                                                                                                                                                                                                                                  |                     |             | 1<br>3 |
|  <p>Die Skizze kann auch für <math>\frac{2}{v} &lt; f_a(v)</math> erstellt werden.</p> <p>Eine Maximalstelle <math>v</math> ist eine Lösung der Gleichung <math>a \cdot x^2 = 1</math> und es gilt <math>f_a(v) = v</math>.<br/>Das beschriebene Flächenstück ist ein Trapez mit dem Flächeninhalt<br/> <math>A_T = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2}{v} + f_a(v) \right) \cdot v = 1 + \frac{1}{2} v^2</math>.<br/> <math>49 = 1 + \frac{1}{2} v^2 \Leftrightarrow v^2 = 96</math><br/> Mit <math>a \cdot v^2 = 1</math> folgt <math>a = \frac{1}{96}</math>.</p> |                     |             | 2<br>4 |
| Punktsummen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 12                  | 18          | 10     |

**Kernfach Mathematik**

**Aufgabe 2: Analysis**

Mit ferngesteuerten Fahrzeugen, sogenannten Buggys, werden Rennen auf speziellen Fahrbahnen gefahren. Ein erster Fahrbahnabschnitt vom Startpunkt  $S$  zum Punkt  $P$  wird mithilfe einer Funktion  $f$  modelliert. An der Stelle  $x$  gibt  $f(x)$  die Höhe der Fahrbahn an. Auf beiden Achsen im zugehörigen Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.



a) Auf dem Beiblatt ist der Graph der Funktion  $f$  größer dargestellt.

a1) Geben Sie mithilfe des Graphen die Höhe der Fahrbahn an der Stelle  $x = 1$  an. (1 P)

a2) Bestimmen Sie unter Verwendung geeigneter Hilfslinien in der Abbildung auf dem Beiblatt

- die Stellen, an denen die Fahrbahnhöhe 1,6 m beträgt, und
- die Steigung der Fahrbahn an der Stelle  $x = 2$ .

(5 P)

Verwenden Sie für den ersten Fahrbahnabschnitt im Folgenden

$$f(x) = -0,01x^3 + 0,21x^2 - 1,2x + 3 \quad \text{mit} \quad x \in [0; 10].$$

Ein Buggy fährt von  $S(0 | 3)$  nach  $P(10 | 2)$ . Während der Fahrt nimmt die Höhe der Fahrbahn zunächst ab, bis sie ihren Minimalwert erreicht, und nimmt anschließend wieder zu.

b)b1) Berechnen Sie die minimale Höhe der Fahrbahn. (4 P)

b2) Berechnen Sie die maximale Steigung, die der Buggy während seiner Fahrt überwindet. (5 P)

b3) Die Länge  $l$  des Graphen der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a; b]$  kann durch

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ berechnet werden.}$$

Berechnen Sie die Länge des Fahrbahnabschnitts.

(3 P)

**Kernfach Mathematik**

---

Ein zweiter Fahrbahnabschnitt wird durch die Funktion  $g$  mit

$$g(x) = 2 \cdot e^{-0,4 \cdot (x-10)^2} \quad \text{und} \quad x \in [10; 14]$$

modelliert. An der Stelle  $x$  gibt  $g(x)$  die Höhe der Fahrbahn an.

c) c1) Zeichnen Sie in die Abbildung auf dem Beiblatt den Graphen der Funktion  $g$  unter Verwendung der dort angegebenen Wertetabelle. (2 P)

c2) Bestimmen Sie einen Term der ersten Ableitungsfunktion  $g'$  von  $g$ . (2 P)

c3) Der Graph von  $g$  schließt im Punkt  $P(10|2)$  an den Graphen von  $f$  an. Untersuchen Sie, ob dieser Anschluss knickfrei ist. (2 P)

c4) Für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $g_a$  mit  $g_a(x) = 2 \cdot e^{-a \cdot (x-10)^2}$  und  $x \in [10; 14]$  gegeben.

- Weisen Sie nach, dass alle Funktionsgraphen der Schar durch den Punkt  $P(10|2)$  verlaufen.
- Zeigen Sie, dass  $P$  der einzige Punkt ist, den je zwei verschiedene Graphen der Schar gemeinsam haben.

(5 P)

d) Ein Buggy fährt mit so hoher Geschwindigkeit, dass er am Übergang der beiden Fahrbahnabschnitte an der Stelle  $x = 10$  den Kontakt zur Fahrbahn verliert und ein Stück fliegt, bis er auf der durch  $g$  modellierten Fahrbahn landet und weiterfährt.

Die Flugbahn lässt sich mithilfe einer Parabel beschreiben. Diese besitzt den Scheitelpunkt  $P(10|2)$  und schneidet den Graphen von  $g$  an der Stelle  $x = 12,3$ .

d1) Leiten Sie einen Funktionsterm der Funktion  $h$  her, deren Graph diese Parabel ist.

[Kontrolle:  $h(x) \approx -0,3325x^2 + 6,65x - 31,25$ ] (4 P)

d2) Berechnen Sie die durchschnittliche Höhe der Flugbahn über der Fahrbahn. (3 P)

d3) Im Allgemeinen hängen die Weite des Fluges und die Geschwindigkeit  $v$  des Buggys an der Stelle  $x = 10$ , an der dieser den Kontakt zur Fahrbahn verliert, voneinander ab. Die zugehörige Flugbahn wird für  $v > 0$  beschrieben mithilfe einer Parabel mit dem Funktionsterm

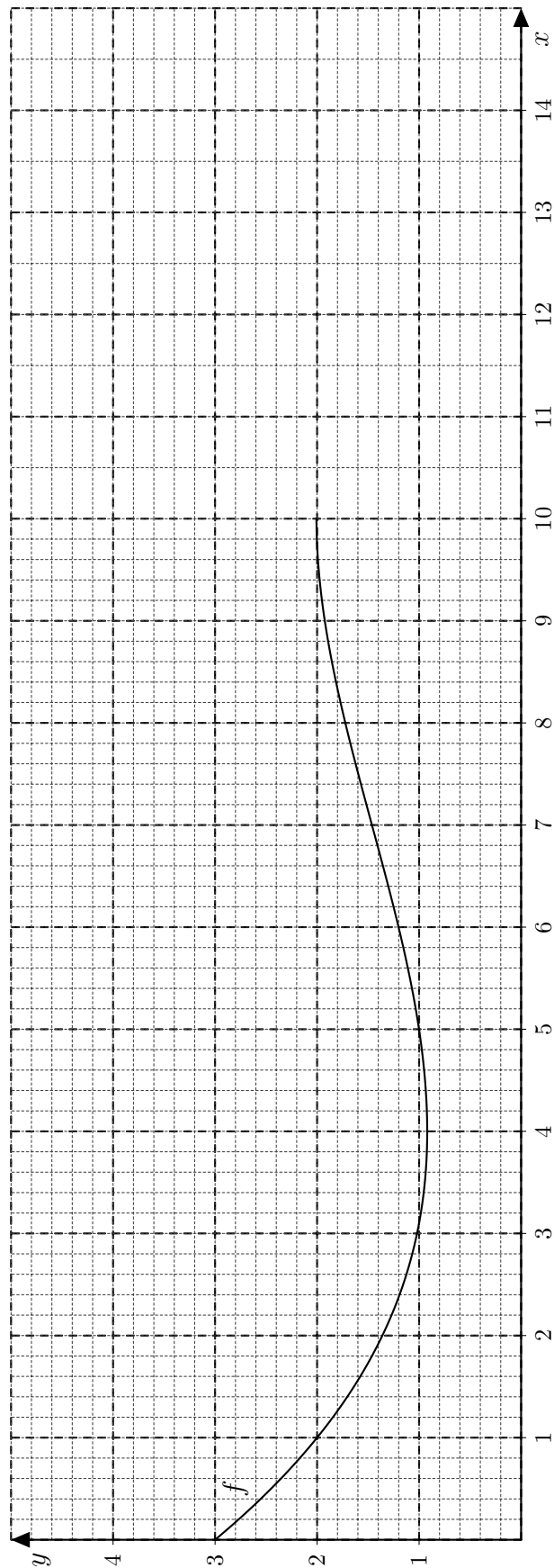
$$h_v(x) = -\frac{5}{v^2} (x - 10)^2 + 2.$$

Diese Parabel schneidet den Graphen von  $g$  an der Stelle  $x = 10 + k$  mit  $0 < k < 4$ .

Zeigen Sie, dass  $v = \sqrt{\frac{5k^2}{2 - 2 \cdot e^{-0,4k^2}}}$  gilt. (4 P)

Kernfach Mathematik

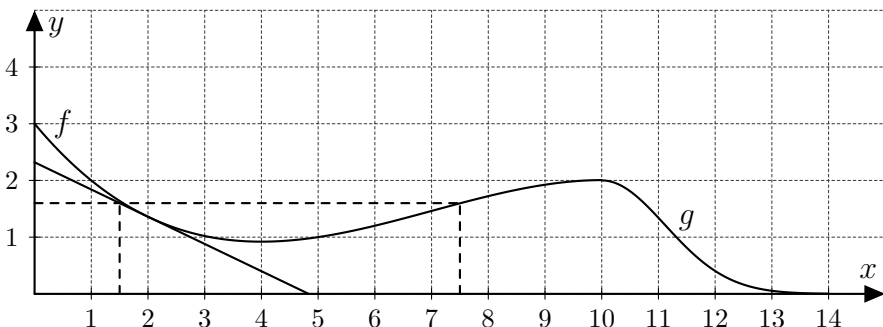
Beiblatt



|        |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $x$    | 10   | 10,5 | 11   | 11,5 | 12   | 12,5 | 13   | 13,5 | 14   |
| $g(x)$ | 2,00 | 1,81 | 1,34 | 0,81 | 0,40 | 0,16 | 0,05 | 0,01 | 0,00 |

Wertetabelle zu Teilaufgabe c1)

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Bewertung<br>Zuordnung |        |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|--------|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | I                      | II     | III |
| <b>Teilaufgabe a)</b><br>2 m                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1                      |        |     |
|  <p>Ungefähr an den Stellen 1,5 und 7,5 beträgt die Fahrbahnhöhe 1,6 m.<br/>Die Steigung an der Stelle 2 beträgt ungefähr <math>-\frac{2,3}{4,8} \approx -0,48</math>.<br/>Werte im Bereich <math>-0,52</math> bis <math>-0,43</math> gelten als richtig.<br/>Die Abbildung enthält auch die Lösung der Teilaufgabe c1).</p>                                                                                                                                                                                                              | 2<br>3                 |        |     |
| <b>Teilaufgabe b)</b><br>$f'(x) = -0,03x^2 + 0,42x - 1,2$<br>Notwendig für einen Tiefpunkt des Graphen von $f$ an der Stelle $x$ ist $f'(x) = 0$ .<br>$-0,03x^2 + 0,42x - 1,2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 10$<br>Aufgrund des beschriebenen Fahrbahnverlaufs ist $x = 4$ die Minimalstelle.<br>Mit $f(4) = 0,92$ ist die minimale Fahrbahnhöhe 0,92 m.                                                                                                                                                                                                                                                               | 3<br>1                 |        |     |
| Zu berechnen ist das globale Maximum der 1. Ableitung von $f$ .<br>Für ein lokales Maximum von $f'$ an der Stelle $x$ im Inneren des Definitionsbereichs ist $f''(x) = 0$ notwendig.<br>Mit $f''(x) = -0,06x + 0,42$ ist $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -0,06x + 0,42 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ .<br>Da zusätzlich $f'(7) = 0,27$ , $f'(0) = -1,2$ und $f'(10) = 0$ gilt, ist eine hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum der 1. Ableitung von $f$ an der Stelle $x = 7$ erfüllt. Zugleich zeigen die Werte von $f'$ an den Rändern, dass dieses auch das globale Maximum ist.<br>Die maximale Steigung beträgt 0,27. |                        | 3<br>2 |     |
| $l = \int_0^{10} \sqrt{1 + (-0,03x^2 + 0,42x - 1,2)^2} dx \approx 10,79$<br>Die Fahrbahn hat eine Länge von ca. 10,79 m.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                        |        | 3   |

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Bewertung Zuordnung |    |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | I                   | II | III |
| <b>Teilaufgabe c)</b><br><i>Zeichnung siehe Erwartungshorizont zu Teilaufgabe a2).</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 2                   |    |     |
| $g'(x) = 2 \cdot e^{-0,4 \cdot (x-10)^2} \cdot (-0,4 \cdot 2 \cdot (x-10))$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                     | 2  |     |
| Mit $g'(10) = 0 = f'(10)$ schließen beide Funktionsgraphen knickfrei aneinander an.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                     | 2  |     |
| Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $g_a(10) = 2 \cdot e^{-a(10-10)^2} = 2$ .<br>Jeder Graph der Schar verläuft also durch den Punkt $(10   2)$ .<br>Für eine Schnittstelle $x$ zweier Funktionen $g_a$ und $g_b$ gilt $g_a(x) = g_b(x)$ .<br>Für $x \neq 10$ folgt<br>$2 \cdot e^{-a(x-10)^2} = 2 \cdot e^{-b(x-10)^2} \Leftrightarrow -a \cdot (x-10)^2 = -b \cdot (x-10)^2 \Leftrightarrow a = b$ .<br>Folglich ist $P$ der einzige Punkt, den je zwei verschiedene Graphen der Funktionenschar gemeinsam haben. |                     | 2  | 3   |
| <b>Teilaufgabe d)</b><br>Da der Punkt $P(10   2)$ der Scheitelpunkt der Parabel ist, lässt sich diese durch $h(x) = c \cdot (x-10)^2 + 2$ mit $c \in \mathbb{R}$ beschreiben.<br>Aus dem Ansatz $h(12,3) = g(12,3)$ ergibt sich<br>$c \cdot (12,3-10)^2 + 2 = 2 \cdot e^{-0,4 \cdot (12,3-10)^2}$ und somit<br>$c = \frac{2 \cdot e^{-0,4 \cdot 2,3^2} - 2}{2,3^2} \approx -0,3325$ .<br>Ein Funktionsterm zur Beschreibung der Flugbahn ist also näherungsweise<br>$h(x) \approx -0,3325 \cdot (x-10)^2 + 2$ .   |                     | 4  |     |
| $\frac{1}{12,3-10} \cdot \int_{10}^{12,3} (h(x) - g(x)) dx \approx 0,244$<br>Die durchschnittliche Flughöhe über der Fahrbahn beträgt ca. 24 cm.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                     |    | 3   |
| $h_v(10+k) = g(10+k)$<br>$\Leftrightarrow -\frac{5}{v^2} \cdot (10+k-10)^2 + 2 = 2 \cdot e^{-0,4 \cdot (10+k-10)^2}$<br>$\Leftrightarrow -\frac{5}{v^2} \cdot k^2 + 2 = 2 \cdot e^{-0,4 k^2}$<br>$\Leftrightarrow v^2 = \frac{5 k^2}{2 - 2 \cdot e^{-0,4 k^2}}$<br>Wegen $v > 0$ ergibt sich $v = \sqrt{\frac{5 k^2}{2 - 2 \cdot e^{-0,4 k^2}}}$ .                                                                                                                                                                |                     |    | 4   |
| Punktsummen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 12                  | 18 | 10  |

**Kernfach Mathematik**

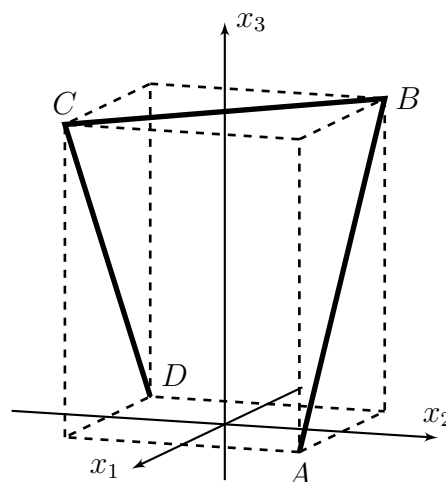
**Aufgabe 3: Analytische Geometrie**

Im Koordinatensystem ist der Streckenzug abgebildet, der aus den Strecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  und  $\overline{CD}$  besteht mit

$$A(11 \mid 11 \mid 0), B(-11 \mid 11 \mid 28),$$

$$C(11 \mid -11 \mid 28) \text{ und } D(-11 \mid -11 \mid 0).$$

Die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  sind Eckpunkte eines Quaders, der gestrichelt dargestellt ist.



a) a1) Zeichnen Sie den Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $\overline{AB}$  in die obige Abbildung und geben Sie seine Koordinaten an. (2 P)

a2) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt  $N(-9 \mid -11 \mid 3)$  auf der Strecke  $\overline{CD}$  liegt. (5 P)

a3) Berechnen Sie die Länge des abgebildeten Streckenzuges. (3 P)

b) Die Ebene  $E$  enthält die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

b1) Bestimmen Sie eine Gleichung von  $E$  in Koordinatenform.

$$[\text{Kontrolle: } 14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308] \quad (4 \text{ P})$$

b2) Der Abstand des Punktes  $D$  von der Ebene  $E$  wird mit  $d$  bezeichnet.

- Berechnen Sie den Wert von  $d$ .
- Begründen Sie, dass der Term  $\frac{d}{6} \cdot |\vec{AB} \times \vec{BC}|$  das Volumen der Pyramide  $ABCD$  angibt. (6 P)

b3) Berechnen Sie die Größe  $\varphi$  des Winkels, unter dem  $E$  die  $x_1x_2$ -Ebene schneidet. (4 P)

c) Für jede reelle Zahl  $h$  wird der Punkt  $P_h(0 \mid 0 \mid h)$  betrachtet.

c1) Beschreiben Sie die Lage des Punktes  $P_h$  für  $0 < h < 28$ . (2 P)

c2) Bestimmen Sie die beiden Werte von  $h$ , so dass ein Dreieck  $BP_hC$  mit rechtem Winkel bei  $P_h$  vorliegt, und geben Sie alle Werte von  $h$  an, für die sich ein stumpfwinkliges Dreieck  $BP_hC$  ergibt. (6 P)

**Kernfach Mathematik**

- c3) Im Folgenden liegt der Punkt  $P_h$  innerhalb des Quaders und hat von den drei Strecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  und  $\overline{CD}$  den gleichen Abstand. Das folgende Gleichungssystem liefert den Wert von  $h$ :

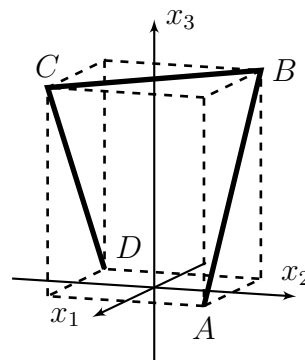
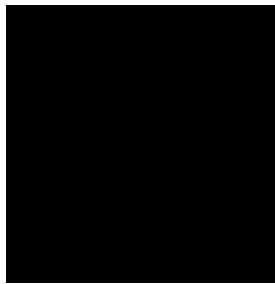
I.  $O\vec{Q} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, t \in [0; 1]$

II.  $P_h\vec{Q} \circ \vec{AB} = 0$

III.  $|P_h\vec{Q}| = 28 - h$

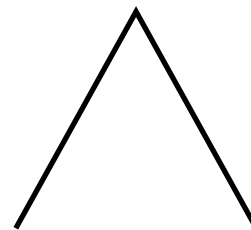
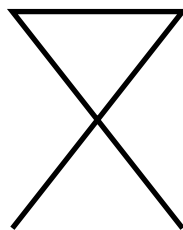
Erläutern Sie die Überlegungen, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von  $h$  zugrunde liegen. (4 P)

- d) Der Streckenzug wird schließlich zur Modellierung des abgebildeten Gebäudes verwendet.



Das Gebäude wird mit verschiedenen Blickrichtungen betrachtet.

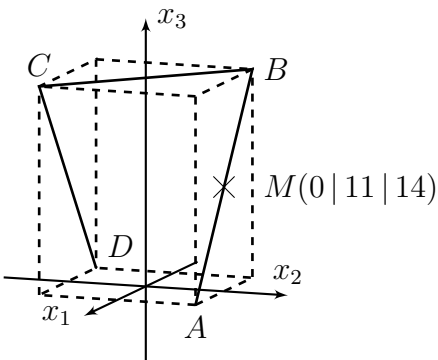
- d1) Die folgenden Abbildungen stellen das Gebäude für zwei Blickrichtungen schematisch dar.



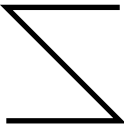
Geben Sie zu jeder der beiden Abbildungen einen möglichen Vektor an, der die zugehörige Blickrichtung beschreibt. (2 P)

- d2) Stellen Sie das Gebäude schematisch für eine Betrachtung von oben dar. (2 P)

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Bewertung Zuordnung |    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | I                   | II | III |
| <b>Teilaufgabe a)</b><br>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2                   |    |     |
| <p>Eine Gleichung für die Gerade <math>g_{CD}</math> durch die Punkte <math>C</math> und <math>D</math> ist</p> $\vec{x} = O\vec{C} + r \cdot C\vec{D} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ 28 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}.$ <p>Die Punktprobe für <math>N</math> liefert</p> $\begin{vmatrix} 11 - 22r & = & -9 \\ -11 & = & -11 \\ 28 - 28r & = & 3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r = \frac{10}{11} \\ -11 = -11 \\ r = \frac{25}{28} \end{vmatrix}.$ <p>Der Widerspruch zwischen der 1. und 3. Gleichung zeigt, dass <math>N</math> nicht auf der Gerade <math>g_{CD}</math> und folglich nicht auf der Strecke <math>\overline{CD}</math> liegt.</p> | 2                   |    |     |
| <p><math>A\vec{B} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, B\vec{C} = \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix}, C\vec{D} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}</math></p> <p>Damit hat der Streckenzug die Länge <math> A\vec{B}  +  B\vec{C}  +  C\vec{D} </math></p> $= \sqrt{(-22)^2 + 28^2} + \sqrt{22^2 + (-22)^2} + \sqrt{(-22)^2 + (-28)^2} \approx 102,33.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 3                   |    |     |
| <b>Teilaufgabe b)</b><br><p>Mit <math>A\vec{B} \times B\vec{C} = \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 616 \\ 616 \\ 484 \end{pmatrix} = 44 \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}</math> ist <math>\vec{n} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}</math> ein Normalenvektor von <math>E</math>.</p> <p>Es gilt <math>\vec{n} \circ O\vec{A} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = 308</math>. Also ist <math>14x_1 + 14x_2 + 11x_3 = 308</math> eine Koordinatengleichung der Ebene <math>E</math>.</p>                                       |                     | 2  |     |
| $d = \left  \frac{14 \cdot (-11) + 14 \cdot (-11) + 11 \cdot 0 - 308}{\sqrt{14^2 + 14^2 + 11^2}} \right  = \frac{616}{\sqrt{513}} \approx 27,20$ <p>Als Grundfläche der Pyramide <math>ABCD</math> kann die Fläche des Dreiecks <math>ABC</math> betrachtet werden; ihr Inhalt ist <math>G = \frac{1}{2} \cdot  A\vec{B} \times B\vec{C} </math>. In der Pyramide ist die zugehörige Spitze dann der Punkt <math>D</math>, die Höhe folglich <math>d</math> und das Volumen <math>\frac{1}{3} \cdot G \cdot d = \frac{d}{6} \cdot  A\vec{B} \times B\vec{C} </math>.</p>                                                                                                                                     |                     | 3  |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                     |    | 3   |

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Bewertung Zuordnung |                 |             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|-----------------|-------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | I                   | II              | III         |
| <p>Mit dem Normalenvektor <math>\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}</math> der <math>x_1x_2</math>-Ebene ergibt sich</p> $\cos(\varphi) = \frac{\left  \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right }{\left  \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix} \right  \cdot \left  \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right } = \frac{11}{\sqrt{513}} \text{ und damit } \varphi \approx 60,94^\circ.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                     | 1<br><br>3      |             |
| <p><b>Teilaufgabe c)</b><br/> <math>P_h</math> liegt auf der <math>x_3</math>-Achse im Bereich <math>0 &lt; x_3 &lt; 28</math> bzw. innerhalb des Quaders.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2                   |                 |             |
| <p>Es liegt ein Dreieck <math>BP_hC</math> mit rechtem Winkel bei <math>P_h</math> vor, wenn <math>BP_h\vec{\phantom{a}} \circ CP_h\vec{\phantom{a}} = 0</math> gilt.</p> <p>Mit <math>BP_h\vec{\phantom{a}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ h-28 \end{pmatrix}</math> und <math>CP_h\vec{\phantom{a}} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ h-28 \end{pmatrix}</math> gilt</p> $BP_h\vec{\phantom{a}} \circ CP_h\vec{\phantom{a}} = 0$ $\Leftrightarrow -11^2 - 11^2 + (h-28)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (h-28)^2 = 11^2 \cdot 2$ $\Leftrightarrow h = 28 + 11 \cdot \sqrt{2} \vee h = 28 - 11 \cdot \sqrt{2}.$ <p>Elementargeometrische Lösungen sind ebenfalls möglich.</p> <p>Für alle reellen Zahlen <math>h</math> mit <math>28 - 11 \cdot \sqrt{2} &lt; h &lt; 28 + 11 \cdot \sqrt{2}</math> und mit <math>h \neq 28</math> liegt ein stumpfwinkliges Dreieck <math>BP_hC</math> vor.</p> |                     | 1<br>1<br><br>2 | 2           |
| <p><math>Q</math> ist ein Punkt auf der Strecke <math>\overline{AB}</math>.<br/> <math>\overline{P_hQ}</math> ist senkrecht zu <math>\overline{AB}</math>, also ist <math> P_h\vec{Q} </math> der Abstand von <math>P_h</math> zu <math>\overline{AB}</math>.<br/> Dieser Abstand stimmt mit <math>28 - h</math>, dem Abstand von <math>P_h</math> zu <math>\overline{BC}</math>, überein.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                     |                 | 1<br>1<br>2 |
| <p><b>Teilaufgabe d)</b><br/> links z.B. <math>\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}</math> und rechts z.B. <math>\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                     |                 | 2           |
| <p>z.B. </p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                     |                 | 2           |
| Punktsummen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 12                  | 18              | 10          |

**Kernfach Mathematik**

---

**Aufgabe 4: Stochastik**

**Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.**

- a) Unter den Versicherten eines Krankenversicherungsunternehmens haben 59 % Datenschutzbedenken ( $D$ ). Einige der Versicherten nutzen ein Fitnessarmband ( $F$ ). Von den Versicherten mit Datenschutzbedenken nutzen 23 % ein Fitnessarmband. 19 % aller Versicherten haben keine Datenschutzbedenken und nutzen ein Fitnessarmband.

a1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 P)

a2) Unter allen Versicherten wird eine Person zufällig ausgewählt.  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie kein Fitnessarmband nutzt und Datenschutzbedenken hat. (2 P)

a3) Eine unter allen Versicherten zufällig ausgewählte Person nutzt ein Fitnessarmband.  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie Datenschutzbedenken hat. (3 P)

a4) Die Zahl 0,23 und der Term  $0,59 \cdot 0,23 + 0,19$  geben Wahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang an. Es gilt  $0,23 \neq 0,59 \cdot 0,23 + 0,19$ .  
Begründen Sie damit, dass die Ereignisse „Eine unter allen Versicherten zufällig ausgewählte Person hat Datenschutzbedenken.“ und „Eine unter allen Versicherten zufällig ausgewählte Person nutzt ein Fitnessarmband.“ stochastisch abhängig sind. (3 P)

100 Versicherte des Unternehmens werden zufällig ausgewählt.

a5) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- höchstens 70 der ausgewählten Versicherten Datenschutzbedenken haben;
- mehr als 50 % der ausgewählten Versicherten Datenschutzbedenken haben;
- mindestens 54 und höchstens 64 der ausgewählten Versicherten Datenschutzbedenken haben. (6 P)

a6) Ersetzt man die Platzhalter  $a$  und  $b$  in geeigneter Weise, so kann mit dem Term

$$1 - \sum_{k=51}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,59^k \cdot a^b$$

die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses im Sachzusammenhang berechnet werden.  
Geben Sie an, wodurch die Platzhalter zu ersetzen sind, und beschreiben Sie das zugehörige Ereignis. (3 P)

**Kernfach Mathematik**

b) Eine Händlerin bezieht Fitnessarmbänder von einer Firma. Die Armbänder werden in Kartons geliefert. Ein Karton enthält 36 Schachteln mit jeweils einem Armband. Insgesamt sind 12 weiße, 12 rote und 12 blaue Armbänder in einem Karton.

b1) Aus einem vollständig gefüllten Karton werden zufällig und ohne Zurücklegen drei Schachteln entnommen.

- Geben Sie ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{12}{36} \cdot \frac{11}{35} \cdot \frac{10}{34}$  an.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der drei Schachteln ein weißes Armband enthalten. (5 P)

b2) Die Händlerin besitzt zwei Kartons der Firma. Einer dieser Kartons ist noch vollständig gefüllt, der andere Karton enthält nur noch 30 Schachteln, denn aus diesem sind 6 Schachteln mit weißen Armbändern verkauft worden.

Die Händlerin wählt einen der zwei Kartons zufällig aus, dann entnimmt sie aus diesem Karton zufällig eine Schachtel.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Händlerin

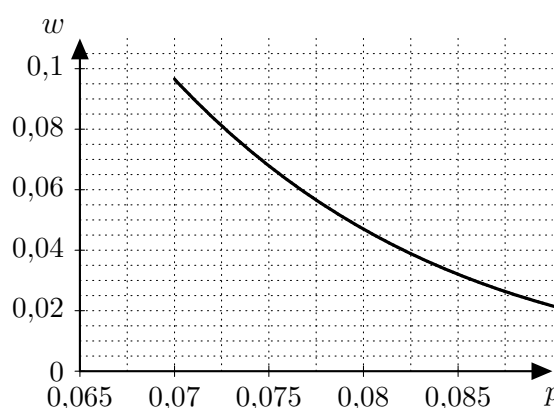
- kein weißes Armband erhält;
- zufällig den vollständigen Karton ausgewählt hat, wenn sie ein weißes Armband erhält. (7 P)

c) Ein Händler ist im Internet auf die Information gestoßen, dass 7% der produzierten Fitnessarmbänder fehlerhaft seien. Der Händler vermutet, dass weniger Armbänder fehlerhaft sind. Um dies zu überprüfen, führt er einen Signifikanztest mit der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Armbänder beträgt mindestens 7%.“ durch.

c1) Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang. (2 P)

Für diesen Test gilt:

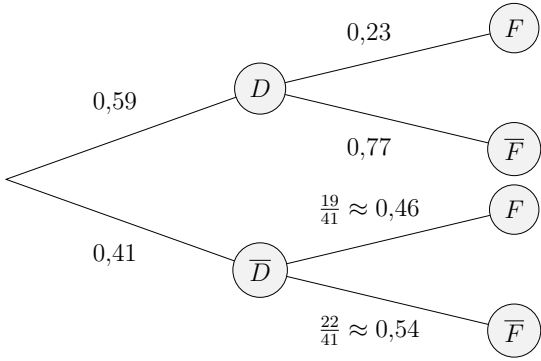
- (1) Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn höchstens vier Armbänder fehlerhaft sind.
- (2) Der Abbildung kann die Wahrscheinlichkeit  $w$  für den Fehler erster Art in Abhängigkeit vom Anteil  $p$  fehlerhafter Armbänder entnommen werden.



c2) Begründen Sie anhand der Abbildung, dass das Signifikanzniveau nicht 9% ist. (2 P)

c3) Ermitteln Sie den Umfang der für den Test verwendeten Stichprobe. (4 P)

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Bewertung Zuordnung |    |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----|-----|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | I                   | II | III |
| <b>Teilaufgabe a)</b><br>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                     |    |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3                   |    |     |
| $P(D \cap \bar{F}) = 0,59 \cdot 0,77 = 0,4543 \approx 45 \%$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 2                   |    |     |
| $P_F(D) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{0,59 \cdot 0,23}{0,59 \cdot 0,23 + 0,19} = 0,4166 \approx 42 \%$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                     | 3  |     |
| <p>Da unter den Versicherten mit Datenschutzbedenken 23 % ein Fitnessarmband nutzen, folgt <math>P_D(F) = 0,23</math>.</p> <p>Der Term <math>0,59 \cdot 0,23 + 0,19</math> beschreibt den Anteil der Versicherten, die ein Fitnessarmband nutzen, unter allen Versicherten; also folgt <math>P(F) = 0,59 \cdot 0,23 + 0,19</math>.</p> <p>Daher ist <math>P_D(F) \neq P(F)</math>. Somit sind die Ereignisse <math>D</math> und <math>F</math> stochastisch abhängig.</p>                 |                     | 3  |     |
| <p><math>X</math>: Anzahl der Versicherten mit Datenschutzbedenken.</p> <p><math>X</math> ist binomialverteilt mit den Parametern <math>n = 100</math> und <math>p = 0,59</math>.</p> <p><math>P(X \leq 70) \approx 0,9913 \approx 99 \%</math></p> <p><math>P(X &gt; 50) = 1 - P(X \leq 50) \approx 1 - 0,0428 = 0,9572 \approx 96 \%</math></p> <p><math>P(54 \leq X \leq 64) = P(X \leq 64) - P(X \leq 53)</math><br/> <math>\approx 0,8687 - 0,1320 = 0,7367 \approx 74 \%</math></p> | 1<br>1<br>2<br>2    |    |     |
| <p>Für <math>a = 0,41</math> und <math>b = 100 - k</math> ist das zugehörige Ereignis „Höchstens die Hälfte der ausgewählten Versicherten hat Datenschutzbedenken.“.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                     | 3  |     |
| <b>Teilaufgabe b)</b><br><p>Z. B. „Es werden drei weiße Armbänder gezogen.“</p> <p>Die Zufallsgröße <math>Y</math> beschreibt die Anzahl der gezogenen Schachteln mit weißen Armbändern. <math>Y</math> ist hypergeometrisch verteilt.</p> $P(Y = 2) + P(Y = 3) = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{36}{3}} + \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{36}{3}}$ $= \frac{451}{1785} \approx 0,2527 \approx 25 \%$                                                    | 1                   | 1  |     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                     | 3  |     |

**Kernfach Mathematik**

| Erwartete Schülerleistung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Bewertung Zuordnung |        |     |                 |        |        |  |  |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|--------|-----|-----------------|--------|--------|--|--|---|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | I                   | II     | III |                 |        |        |  |  |   |
| <p>Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es wurde der vollständige Karton ausgewählt und dann eine Schachtel, die kein weißes Armband enthält, entnommen.“ ist <math>\frac{1}{2} \cdot \frac{24}{36} = \frac{1}{3}</math>.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Es wurde der unvollständige Karton ausgewählt und dann eine Schachtel, die kein weißes Armband enthält, entnommen.“ beträgt <math>\frac{1}{2} \cdot \frac{24}{30} = \frac{2}{5}</math>.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, keine Schachtel mit weißem Armband zu ziehen, beträgt daher <math>\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} \approx 73\%</math>.</p> <p><math>V</math>: “Es wurde der vollständige Karton ausgewählt.”</p> <p><math>W</math>: “Es wird eine Schachtel mit einem weißen Armband entnommen.”</p> $P_W(V) = \frac{P(V \cap W)}{P(W)} = \frac{P(V \cap W)}{P(V \cap W) + P(\bar{V} \cap W)}$ $= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{36}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{30}} = \frac{5}{8} \approx 63\%$ |                     | 3      | 4   |                 |        |        |  |  |   |
| <p><b>Teilaufgabe c)</b></p> <p>Der Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Nullhypothese verworfen wird, also von einem Anteil fehlerhafter Armbänder von unter 7% ausgegangen wird, obwohl die Nullhypothese wahr ist, d.h. die Wahrscheinlichkeit für fehlerhafte Armbänder größer oder gleich 7% ist.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                     | 2      |     |                 |        |        |  |  |   |
| <p>Aus der Abbildung kann für den Fehler 1. Art für <math>p = 0,07</math> eine Wahrscheinlichkeit von etwa 9,7% entnommen werden.</p> <p>Da die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art immer kleiner oder gleich dem Signifikanzniveau ist, ist 9% als Signifikanzniveau nicht möglich.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                     |        | 2   |                 |        |        |  |  |   |
| <p>Die Zufallsgröße <math>X_n</math> beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Armbänder und ist binomialverteilt mit den Parametern <math>n</math> und <math>p = 0,07</math>.</p> <p>Aus der Abbildung ergibt sich <math>P(X_n \leq 4) \approx 0,097</math>.</p> <p>Systematisches Probieren führt auf:</p> <table border="1"> <tr> <td><math>n</math></td> <td>112</td> <td>113</td> </tr> <tr> <td><math>P(X_n \leq 4)</math></td> <td>0,1007</td> <td>0,0966</td> </tr> </table> <p>Daher beträgt der Stichprobenumfang <math>n = 113</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $n$                 | 112    | 113 | $P(X_n \leq 4)$ | 0,1007 | 0,0966 |  |  | 4 |
| $n$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 112                 | 113    |     |                 |        |        |  |  |   |
| $P(X_n \leq 4)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,1007              | 0,0966 |     |                 |        |        |  |  |   |
| Punktsummen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 12                  | 18     | 10  |                 |        |        |  |  |   |