HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f mit $f\left(x\right) = 4x^3 - 12x$.

1.1 Zeigen Sie, dass $x = 1$ eine lokale Minimalstelle von f ist.

(3 P)

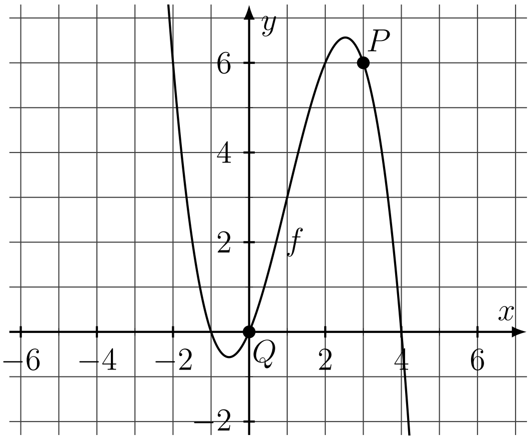
1.2 Geben Sie einen Funktionsterm einer Stammfunktion F von f mit $F\left(0\right) \neq 0$ an.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$f'\left(x\right) = 12x^2 - 12$, $f''\left(x\right) = 24x$ Wegen $f'\left(1\right) = 0$ und $f''\left(1\right) = 24 > 0$ ist $x = 1$ eine lokale Minimalstelle. 3 P
1.2	*z. B.* $F\left(x\right) = x^4 - 6x^2 + 2021$ 2 P

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Im Koordinatensystem ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$ dargestellt.



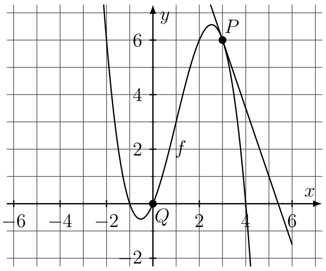
Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(3\,|\,6)$ heißt t_P, diejenige im Punkt $Q(0\,|\,0)$ heißt t_Q.

2.1 Es ist $f'(3) = -\frac{5}{2}$.
Ermitteln Sie zeichnerisch die Nullstelle der Tangente t_P.

(2 P)

2.2 Prüfen Sie rechnerisch, ob die Tangente t_Q durch P verläuft.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	 Die Nullstelle ist 5,4. 2 P *Korrekturhinweis: Die angegebene Nullstelle muss im Intervall* $[5{,}2\,;\,5{,}6]$ *liegen.*
2.2	Es ist $f'(x) = -\frac{3}{2}\,x^2 + 3\,x + 2$ und damit $f'(0) = 2$. Da zudem $f(0) = 0$ ist, ist $y = 2x$ eine Gleichung für t_Q. $P(3\,|\,6)$ liegt auf dieser Tangente, denn $6 = 2 \cdot 3$. 3 P

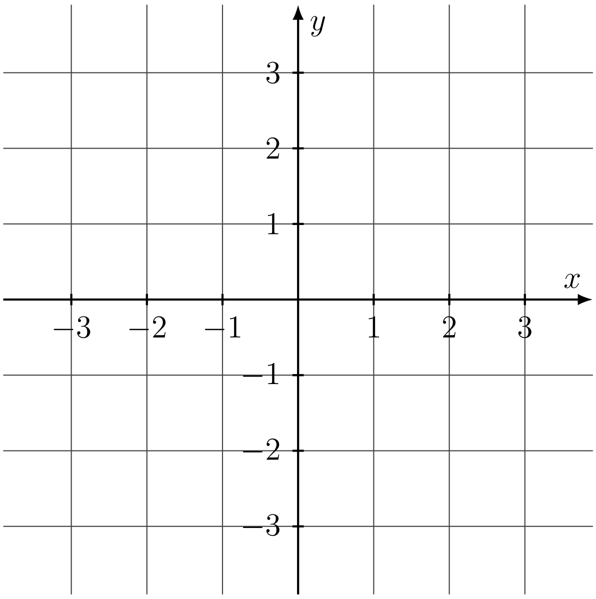
HMF 3 - Analysis (Pool 1)

Es gibt Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:

(1.) $f(0) = 2$

(2.) $f'(-1) = 0$ und $f''(-1) < 0$

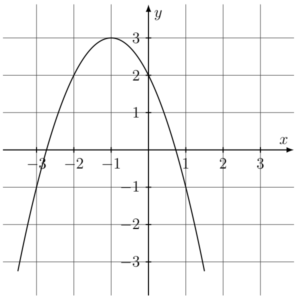
3.1 Zeichnen Sie den Graphen einer Funktion mit diesen Eigenschaften in das abgebildete Koordinatensystem.



(2 P)

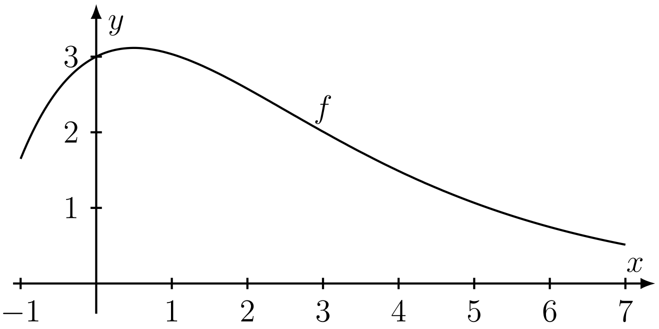
3.2 Eine der Funktionen mit den obigen Eigenschaften hat den Funktionsterm $-0{,}5x^4 + bx + c$.
Bestimmen Sie die Werte von b und c.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analysis (Pool 1)
3.1	 *Der Punkt $(0 \mid 2)$ muss auf dem Graphen liegen. Der Graph muss an der Stelle $x = -1$ einen Hochpunkt besitzen.* 2 P
3.2	Es ist $2 = f(0) = c$. Mit $f'(x) = -2x^3 + b$ ist $0 = f'(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + b = 2 + b \Leftrightarrow b = -2$. 3 P

HMF 4 - Analysis (Pool 2)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f\left(x\right)=\left(2x+3\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.



4.1 Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F\left(x\right)=\left(-4x-14\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ eine Stammfunktion von f ist.

(2 P)

4.2 Untersuchen Sie, ob für jede reelle Zahl $k>0$ gilt:

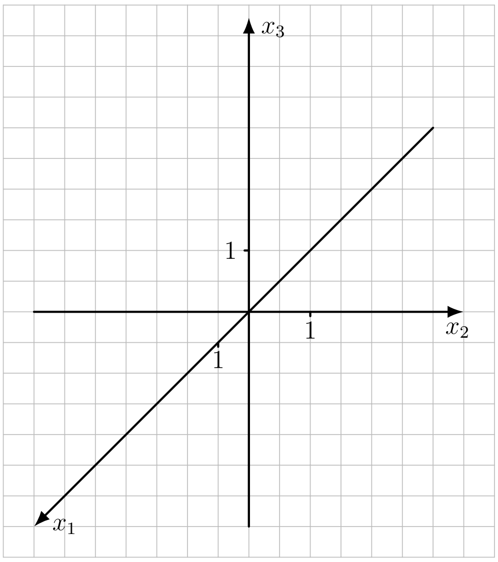
$$\int\limits_0^k f\left(x\right)\mathrm{d}x<14$$

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analysis (Pool 2)
4.1	Wegen $F'\left(x\right)=-4\cdot\mathrm{e}^{-0{,}5x}+\left(-4x-14\right)\cdot\left(-0{,}5\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ $=-4\cdot\mathrm{e}^{-0{,}5x}+\left(2x+7\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}5x}=\left(2x+3\right)\mathrm{e}^{-0{,}5x}=f\left(x\right)$ ist F eine Stammfunktion von f. 2 P
4.2	Es ist $\int\limits_0^k f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(k\right)-F\left(0\right)=\left(-4k-14\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}5k}-\left(-4\cdot0-14\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}5\cdot0}$ $=\left(-4k-14\right)\cdot\mathrm{e}^{-0{,}5k}+14.$ Für jede Zahl $k>0$ ist $-4k-14$ negativ und $\mathrm{e}^{-0{,}5k}$ positiv. Somit ist das Produkt dieser beiden Terme stets negativ. Die zu untersuchende Aussage ist daher wahr. 3 P

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist die Ebene E mit $E:\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$.
Die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen sind die sogenannten Spurpunkte der Ebene E. So ist $S_1\,(6\,|\,0\,|\,0)$ ein Spurpunkt der Ebene E.

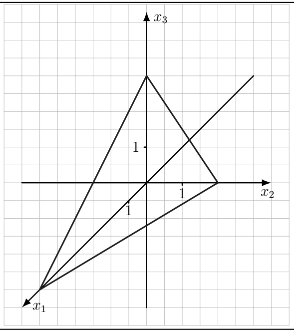


5.1 Geben Sie die Koordinaten der anderen beiden Spurpunkte S_2 und S_3 der Ebene E an und zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ in das Koordinatensystem ein.

(3 P)

5.2 Es gibt unendlich viele Geraden, die parallel zu E sind und durch den Punkt $P\,(2\,|\,5\,|\,7)$ verlaufen.
Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden g.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)
5.1	$S_2\,(0\,\|\,2\,\|\,0)$, $S_3\,(0\,\|\,0\,\|\,3)$  3 P
5.2	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E. Wegen $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ ist $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ eine Gleichung einer solchen Geraden g. 2 P

HMF 6 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist die Ebene $E: \ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$.

6.1 Geben Sie diejenige Zahl a an, für die der Punkt $A\,(a\,|\,0\,|\,-1)$ in der Ebene E liegt.
(1 P)

6.2 Der Punkt S ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g, die senkrecht auf E steht und durch den Punkt $B\,(1\,|\,3\,|\,4)$ verläuft.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.
(4 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analytische Geometrie (Pool 1)
6.1	$a = 2$ 1 P
6.2	$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E. Damit ist $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ die Lotgerade von E durch B. Wegen $2\,(1+2r) + 2\,(3+2r) + 4 + r = 3 \Leftrightarrow 12 + 9r = 3 \Leftrightarrow r = -1$ ist $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$. Damit ist $S\,(-1\,|\,1\,|\,3)$. 4 P

HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Für alle reellen Zahlen a ist sowohl eine Ebene E_a mit $E_a:\ x_1 + 2\,x_2 + a\,x_3 = 5$ als auch eine Gerade g_a mit $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2+a\\-3\end{pmatrix}$ gegeben.

7.1 Zeigen Sie, dass es keine Zahl a gibt, für die g_a orthogonal zu E_a verläuft.

(2 P)

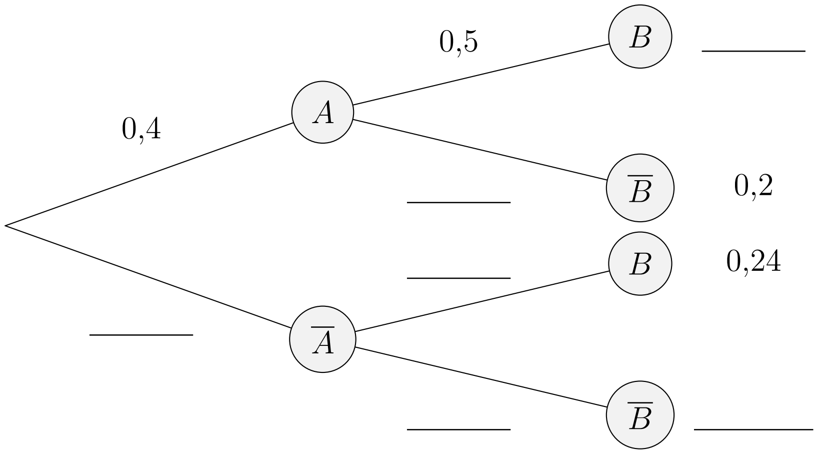
7.2 Untersuchen Sie, ob es einen Wert für a gibt, so dass die Gerade g_a und die Ebene E_a keinen gemeinsamen Punkt haben.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)
7.1	Der Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E_a, der Vektor $\begin{pmatrix}1\\2+a\\-3\end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Geraden g_a. Diese beiden Vektoren stimmen in der 1. Komponente überein. Wäre g_a orthogonal zu E_a, müssten die beiden Vektoren also identisch sein. Das führt zu dem Widerspruch, dass gleichzeitig $a = 0$ und $a = -3$ wäre. 2 P
7.2	Die Gerade g_a verläuft parallel zu E_a, wenn $\begin{pmatrix}1\\2+a\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} = 0$ ist. $\begin{pmatrix}1\\2+a\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5 - \ a = 0 \Leftrightarrow a = 5$ Der Punkt $(1\,\|\,0\,\|\,0)$ liegt auf g_5, wegen $1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 5\cdot 0 = 1 \neq 5$ aber nicht in E_5, also sind g_5 und E_5 echt parallel und haben keinen gemeinsamen Punkt. 3 P

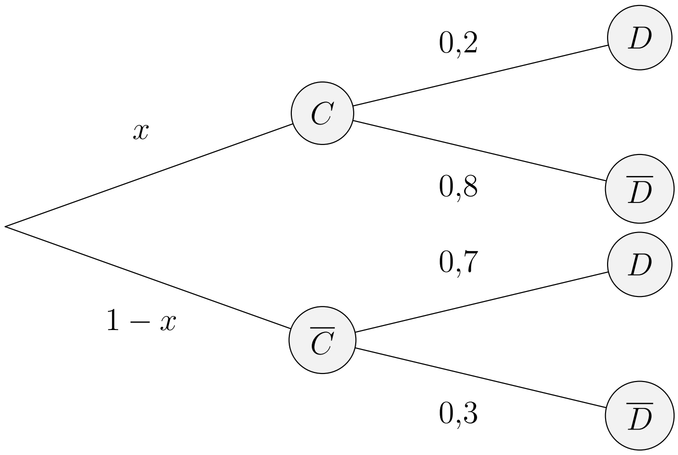
HMF 8 - Stochastik (Pool 1)

8.1 Vervollständigen Sie das folgende Baumdiagramm.

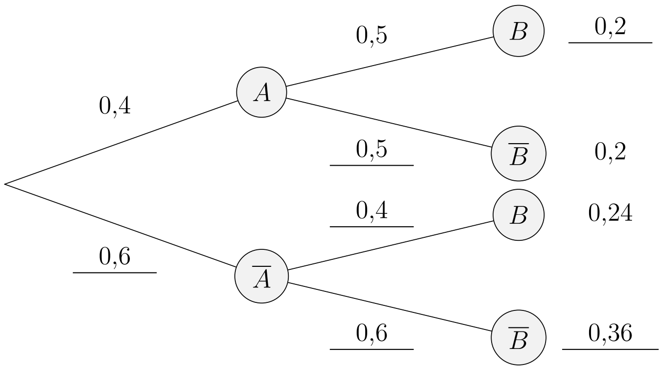


(3 P)

8.2 Bestimmen Sie für das folgende Baumdiagramm denjenigen Wert für x, für den $P(D) = 0{,}6$ ist.



(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 1)
8.1	 3 P
8.2	$x \cdot 0{,}2 + (1-x) \cdot 0{,}7 = 0{,}6$ $\Leftrightarrow \; -0{,}5x = -0{,}1$ $\Leftrightarrow \; x = 0{,}2$ 2 P

HMF 9 - Stochastik (Pool 1)

Ein sechsseitiger Spielwürfel wird fünfmal geworfen.

9.1 Ordnen Sie durch Ankreuzen jedem Ereignis denjenigen Term zu, dessen Wert die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist.

	I	II	III	IV	V
Es werden genau zwei Sechsen geworfen.					
Es wird mindestens eine Sechs geworfen.					
Es werden genau zwei Sechsen geworfen, wobei die zweite Sechs erst im letzten Wurf fällt.					

I $4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}$	II $\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$	III $\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$
IV $1-\left(\frac{5}{6}\right)^5$	V $\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$	

(3 P)

9.2 Geben Sie ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit $\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1$ an. (2 P)

<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 9 - Stochastik (Pool 1)</th></tr>
<tr><td>9.1</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th></tr>
<tr><td>Es werden genau zwei Sechsen geworfen.</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Es wird mindestens eine Sechs geworfen.</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es werden genau zwei Sechsen geworfen, wobei die zweite Sechs erst im letzten Wurf fällt.</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
3 P</td></tr>
<tr><td>9.2</td><td>Es werden insgesamt drei oder vier Sechsen geworfen.
2 P</td></tr>
</table>

HMF 10 - Stochastik (Pool 2)

Eine Urne enthält weiße und rote Kugeln. Es wird fünfmal mit Zurücklegen gezogen.

10.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, keine rote Kugel zu ziehen, falls sich in der Urne eine weiße und neun rote Kugeln befinden.

(2 P)

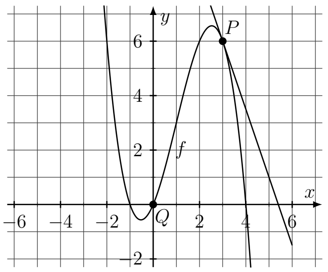
10.2 Es ist p die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Zug eine rote Kugel zu ziehen.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.
Bestimmen Sie alle Werte für p, für die $P(X = 0) = P(X = 1)$ gilt.

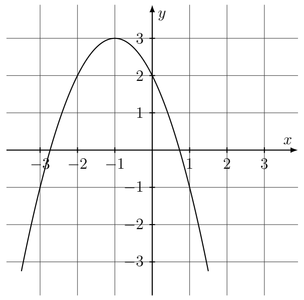
(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 10 - Stochastik (Pool 2)
10.1	$\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{100000}$ 2 P
10.2	$P(X = 0) = P(X = 1) \Leftrightarrow (1-p)^5 = 5 \cdot p \cdot (1-p)^4$ Wegen $p < 1$ gilt $(1-p)^5 = 5 \cdot p \cdot (1-p)^4 \Leftrightarrow 1 - p = 5p \Leftrightarrow 1 = 6p \Leftrightarrow p = \frac{1}{6}$. 3 P

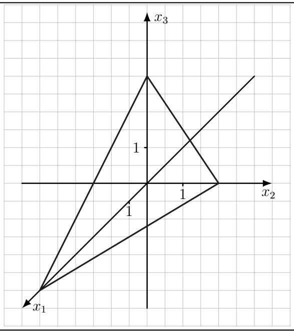
HMF-Bewertungsbogen für: ________________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$f'(x) = 12x^2 - 12,\ f''(x) = 24x$ Wegen $f'(1) = 0$ und $f''(1) = 24 > 0$ ist $x = 1$ eine lokale Minimalstelle. 3 P
1.2	*z. B.* $F(x) = x^4 - 6x^2 + 2021$ 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	 Die Nullstelle ist 5,4. 2 P *Korrekturhinweis: Die angegebene Nullstelle muss im Intervall* $[5{,}2\,;\,5{,}6]$ *liegen.*
2.2	Es ist $f'(x) = -\frac{3}{2}\,x^2 + 3\,x + 2$ und damit $f'(0) = 2$. Da zudem $f(0) = 0$ ist, ist $y = 2x$ eine Gleichung für t_Q. $P(3\,\vert\,6)$ liegt auf dieser Tangente, denn $6 = 2 \cdot 3$. 3 P

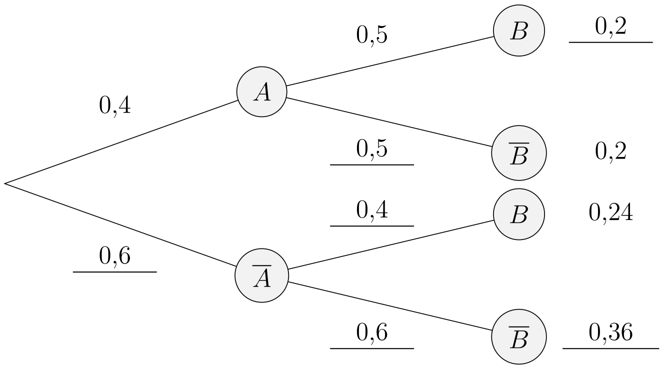
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analysis (Pool 1)
3.1	 *Der Punkt* $(0\,\vert\,2)$ *muss auf dem Graphen liegen.* *Der Graph muss an der Stelle* $x = -1$ *einen Hochpunkt besitzen.* 2 P
3.2	Es ist $2 = f(0) = c$. Mit $f'(x) = -2x^3 + b$ ist $0 = f'(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + b = 2 + b \Leftrightarrow b = -2$. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analysis (Pool 2)
4.1	Wegen $F'(x) = -4 \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} + (-4x-14) \cdot (-0,5) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x}$ $= -4 \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} + (2x+7) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} = (2x+3)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = f(x)$ ist F eine Stammfunktion von f. 2 P
4.2	Es ist $\int\limits_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = F(k) - F(0) = (-4k-14) \cdot \mathrm{e}^{-0,5k} - (-4 \cdot 0 - 14) \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot 0}$ $= (-4k-14) \cdot \mathrm{e}^{-0,5k} + 14.$ Für jede Zahl $k > 0$ ist $-4k-14$ negativ und $\mathrm{e}^{-0,5k}$ positiv. Somit ist das Produkt dieser beiden Terme stets negativ. Die zu untersuchende Aussage ist daher wahr. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)
5.1	$S_2\,(0 \mid 2 \mid 0)$, $S_3\,(0 \mid 0 \mid 3)$  3 P
5.2	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E. Wegen $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} = 0$ ist $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ eine Gleichung einer solchen Geraden g. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analytische Geometrie (Pool 1)
6.1	$a = 2$ 1 P
6.2	$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E. Damit ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ die Lotgerade von E durch B. Wegen $2(1+2r) + 2(3+2r) + 4 + r = 3 \Leftrightarrow 12 + 9r = 3 \Leftrightarrow r = -1$ ist $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}.$ Damit ist $S\,(-1 \mid 1 \mid 3)$. 4 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analytische Geometrie (Pool 2)
7.1	Der Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E_a, der Vektor $\begin{pmatrix}1\\2+a\\-3\end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Geraden g_a. Diese beiden Vektoren stimmen in der 1. Komponente überein. Wäre g_a orthogonal zu E_a, müssten die beiden Vektoren also identisch sein. Das führt zu dem Widerspruch, dass gleichzeitig $a = 0$ und $a = -3$ wäre. 2 P
7.2	Die Gerade g_a verläuft parallel zu E_a, wenn $\begin{pmatrix}1\\2+a\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} = 0$ ist. $\begin{pmatrix}1\\2+a\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5-\ a = 0 \Leftrightarrow a = 5$ Der Punkt $(1 \mid 0 \mid 0)$ liegt auf g_5, wegen $1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 1 \neq 5$ aber nicht in E_5, also sind g_5 und E_5 echt parallel und haben keinen gemeinsamen Punkt. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 1)
8.1	 3 P
8.2	$x \cdot 0{,}2 + (1-x) \cdot 0{,}7 = 0{,}6$ $\Leftrightarrow\ -0{,}5x = -0{,}1$ $\Leftrightarrow\ x = 0{,}2$ 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 9 - Stochastik (Pool 1)
9.1	<table><tr><td></td><td>I</td><td>II</td><td>III</td><td>IV</td><td>V</td></tr><tr><td>Es werden genau zwei Sechsen geworfen.</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Es wird mindestens eine Sechs geworfen.</td><td></td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Es werden genau zwei Sechsen geworfen, wobei die zweite Sechs erst im letzten Wurf fällt.</td><td>X</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> 3 P
9.2	Es werden insgesamt drei oder vier Sechsen geworfen. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 10 - Stochastik (Pool 2)
10.1	$\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{100000}$ 2 P
10.2	$P\left(X=0\right) = P\left(X=1\right) \Leftrightarrow \left(1-p\right)^5 = 5 \cdot p \cdot \left(1-p\right)^4$ Wegen $p < 1$ gilt $\left(1-p\right)^5 = 5 \cdot p \cdot \left(1-p\right)^4 \Leftrightarrow 1-p = 5p \Leftrightarrow 1 = 6p \Leftrightarrow p = \frac{1}{6}.$ 3 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: ________

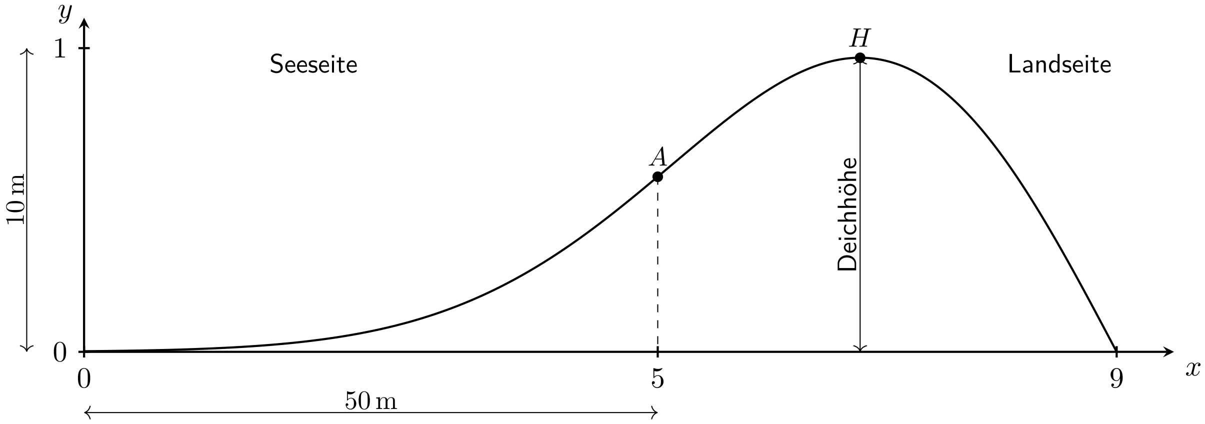
Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: ________

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Angesichts des vorhergesagten Anstiegs des Meeresspiegels wird an der Nordseeküste ein neuer Klimadeich geplant. Stellvertretend für den ganzen Deich wird ein ausgewählter Deichquerschnitt betrachtet, dessen obere Begrenzungslinie durch die Funktion f mit

$$f(x) = -288 \cdot (x-9) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot (x-9)^2 - 6} \qquad \text{und } 0 \leq x \leq 9$$

modelliert wird. Im Folgenden entspricht dabei eine Längeneinheit sowohl in x- als auch in y-Richtung stets $10\,\mathrm{m}$ in der Wirklichkeit.



A ist ein Bezugspunkt auf dem Deich, der zur Vermessung dient. H ist der höchste Punkt des Deiches.

a) a1) Bestimmen Sie die Höhe des Punktes A und die Steigung des Deiches im Punkt A. (3 P)

a2) Berechnen Sie die Breite des Deiches in einer Höhe von $5\,\mathrm{m}$. (3 P)

a3) Berechnen Sie die Deichhöhe. (4 P)

b) Im Folgenden wird die Schar der Funktionen g_k mit

$$g_k(x) = -8 \cdot k^2 \cdot (x-9) \cdot e^{-0{,}1 \cdot (x-9)^2 - k} \qquad \text{für } k \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq x \leq 9$$

betrachtet.

b1) Zeigen Sie, dass f ein Element dieser Schar ist. (2 P)

b2) Begründen Sie anhand des Funktionsterms:
Für jedes $k \neq 0$ hat g_k genau eine Nullstelle. (2 P)

Ein Planungsbüro modelliert mit Hilfe der Funktionen g_k die obere Begrenzungslinie von weiteren Deichquerschnitten.
Dazu werden im Folgenden ausschließlich die Parameterwerte k mit $5 \leq k \leq 7$ betrachtet.

b3) Für jedes solche k ist $H_k\left(9-\sqrt{5}\;\middle|\;8\cdot\sqrt{\frac{5}{e}}\cdot k^2\cdot e^{-k}\right)$ der Hochpunkt des Graphen von g_k. Die y-Koordinate von H_k entspricht der Deichhöhe.

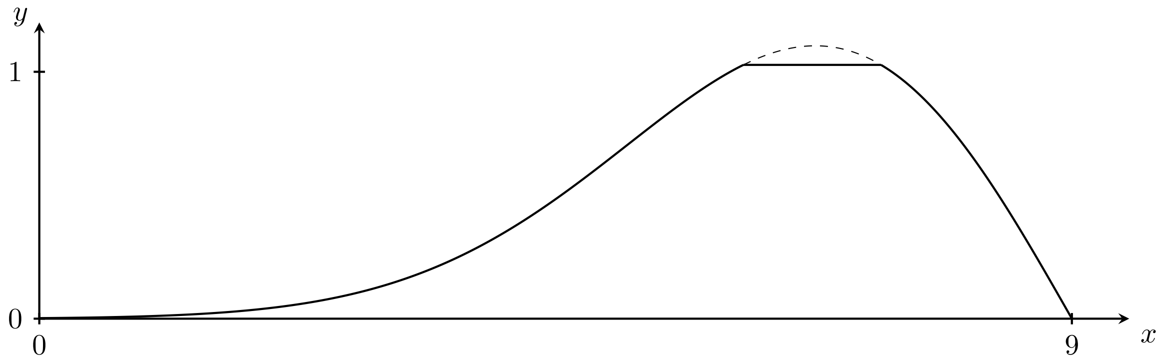
- Bestimmen Sie denjenigen Wert für k, für den die Deichhöhe $11\,\mathrm{m}$ beträgt. (2 P)
- Berechnen Sie die Deichhöhe des höchsten Deiches, der mit Hilfe einer dieser Funktionen g_k mit $5 \leq k \leq 7$ modelliert werden kann. (5 P)

b4) Für jedes betrachtete k hat g_k im Intervall $\left[0\,;\,9-\sqrt{5}\right]$ genau eine Wendestelle.
Bestimmen Sie die Koordinaten des zugehörigen Wendepunkts. (3 P)

[*Kontrolle: Die Wendestelle ist* $9-\sqrt{15}$.]

b5) Der Deich steigt seeseitig bis zu seinem höchsten Punkt an. Dabei verläuft das Deichprofil im Uferbereich zunächst flach, wird dann steiler und flacht zum höchsten Punkt hin wieder ab. Aus Stabilitätsgründen darf der maximale Steigungswinkel des Deichprofils seeseitig höchstens $20°$ betragen.
Untersuchen Sie, für welche k mit $5 \leq k \leq 7$ diese Bedingung erfüllt ist. (5 P)

c) Für die weitere Planung wird der durch $g_{5,8}$ modellierte Deich ausgewählt. Dieser soll einen begradigten Bereich (die sogenannte Deichkrone) erhalten.



c1) Ermitteln Sie rechnerisch die Höhe, in der der Deich begradigt werden müsste, damit die Deichkrone waagerecht und $12\,\mathrm{m}$ breit ist. (3 P)

Es wird schließlich entschieden, den Deich für $6{,}0 \leq x \leq 7{,}2$ zu begradigen.

c2) Zeigen Sie, dass der Deich auf diese Weise nicht waagerecht begradigt wird.
Bestimmen Sie die Neigung des begradigten Bereichs in Prozent. (3 P)

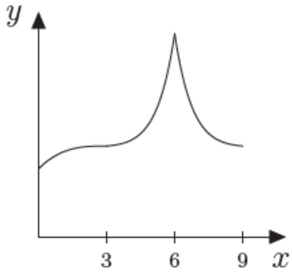
c3) Ein Abschnitt des geplanten Deichs soll $2\,\mathrm{km}$ lang werden.
Berechnen Sie die Menge des benötigten Materials in Kubikmetern. (5 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Im Modell liegt A an der Stelle $x = 5$. Es gilt $f(5) \approx 0{,}577$ und $f'(5) \approx 0{,}317$. Die Höhe des Punktes A beträgt etwa $5{,}77$ Meter und die Steigung des Deichs im Punkt A etwa $0{,}317$.	3		
$f(x) = 0{,}5$ wird von $x \approx 4{,}755$ und $x \approx 8{,}260$ gelöst. Mit $8{,}260 - 4{,}755 = 3{,}505$ beträgt die Breite in einer Höhe von 5 Metern etwa $35{,}05$ Meter.	3		
Die Deichhöhe ist die Höhe des Punktes H. Hier hat f ein lokales Extremum. Notwendig für ein solches Extremum an der Stelle x ist $f'(x) = 0$.	1		
Wegen $0 \leq x \leq 9$ ist $f'(x) = 0 \iff x \approx 6{,}764$. Damit liegt das gesuchte Maximum ungefähr an der Stelle $6{,}764$. Die Deichhöhe beträgt wegen $f(6{,}764) \approx 0{,}968$ etwa $9{,}68$ Meter.	3		
Teilaufgabe b) Eine Möglichkeit ist $k = 6$, denn es ist $g_6(x) = -8 \cdot 36 \cdot (x-9) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot (x-9)^2 - 6} = f(x)$.	2		
Wegen $\mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot (x-9)^2 - k} > 0$ und $k^2 > 0$ für alle $k \neq 0$ gilt $g_k(x) = 0 \iff x - 9 = 0 \iff x = 9$. Somit hat g_k genau eine Nullstelle.		2	
$8 \cdot \sqrt{\frac{5}{e}} \cdot k^2 \cdot e^{-k} = 1{,}1$ wird für $5 \leq k \leq 7$ gelöst durch $k \approx 5{,}807$. Für $k \approx 5{,}807$ beträgt die Deichhöhe $11\,\mathrm{m}$.		2	
Die Funktion h mit $h(k) = 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{e}} \cdot k^2 \cdot e^{-k}$ beschreibt die Deichhöhe in Abhängigkeit von k. Gesucht ist das globale Maximum von $h(k)$ über dem Intervall $[\,5\,;\,7\,]$. Notwendig für ein lokales Extremum von h an der Stelle k ist $h'(k) = 0$. Es ist $h'(k) = 0 \iff k = 0 \vee k = 2$.		3	
Also wird das globale Maximum an einer Randstelle angenommen. Es gilt $h(5) \approx 1{,}828$ und $h(7) \approx 0{,}485$. Somit wird die maximale Deichhöhe für $k = 5$ angenommen und beträgt etwa $18{,}28\,\mathrm{m}$.		2	
Notwendig für eine Wendestelle x von g_k ist $g_k''(x) = 0$. Mit $k \neq 0$ und $0 \leq x \leq 9$ gilt $g_k''(x) = 0 \iff x = 9{-}\sqrt{15} \vee x = 9$. Da es laut Voraussetzung genau eine Wendestelle von g_k für $0 \leq x \leq 9{-}\sqrt{5}$ gibt, ist $x = 9{-}\sqrt{15}$ die gesuchte Stelle. Mit $g_k(9{-}\sqrt{15}) = 8 \cdot \sqrt{\frac{15}{e^3}} \cdot k^2 \cdot e^{-k}$ hat der Wendepunkt des Graphen von g_k die Koordinaten $\left(9 - \sqrt{15} \;\Big\vert\; 8 \cdot \sqrt{\frac{15}{e^3}} \cdot k^2 \cdot e^{-k}\right)$.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Die maximale Steigung liegt für $x \in \left[0\,;\,9-\sqrt{5}\right]$ an der Wendestelle von g_k vor, da die Ränder nicht in Frage kommen. Mit $5 \leq k \leq 7$ wird $g_k'(9-\sqrt{15}) = \tan(20^\circ)$ von $k \approx -0{,}278$, $k \approx 0{,}388$ bzw. $k \approx 5{,}798$ gelöst. Prüft man zum Beispiel die Steigung an der Wendestelle für $k = 6$, so erhält man $\arctan(g_6'(9-\sqrt{15})) \approx \arctan(0{,}319) \approx 17{,}7^\circ < 20^\circ$. Für $5{,}798 \leq k \leq 7$ liegt die maximale seeseitige Steigung somit im erlaubten Bereich.			5
Teilaufgabe c) Die Gleichung $g_{5,8}(x) = g_{5,8}(x+1{,}2)$ wird gelöst durch $x \approx 6{,}137$. Somit folgt für die Höhe der Deichkrone $g_{5,8}(6{,}137) \approx 1{,}028$, also $10{,}28\,\mathrm{m}$.		3	
Es gilt $g_{5,8}(6) = 0{,}994 \neq 1{,}061 = g_{5,8}(7{,}2)$, deshalb wird der Deich nicht waagerecht begradigt. Mit $\frac{g_{5,8}(7{,}2)-g_{5,8}(6)}{7{,}2-6} \approx 0{,}056$ beträgt die Neigung des begradigten Abschnitts etwa $5{,}6\%$.		3	
Für $6 \leq x \leq 7{,}2$ wird der Deichquerschnitt durch ein Trapez modelliert. Es ist $\displaystyle\int_0^6 g_{5,8}(x)\,\mathrm{d}x + 1{,}2 \cdot \frac{1}{2}(g_{5,8}(6) + g_{5,8}(7{,}2)) + \int_{7{,}2}^9 g_{5,8}(x)\,\mathrm{d}x \approx 4{,}015.$ Die Querschnittsfläche beträgt also etwa $401{,}5\,\mathrm{m}^2$. Mit $401{,}5 \cdot 2000 = 803000$ ergibt sich ein Materialbedarf von etwa $803\,000\,\mathrm{m}^3$.			5
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 1: Analysis

Im Jahr 2019 zerstörte ein Großbrand das Dach der Kathedrale Notre-Dame de Paris. Eine der vielen Ideen für den geplanten Wiederaufbau sieht die Errichtung eines Glasdachs mit einem gläsernen Turm darauf vor.



[redacted]

In einem geeigneten Koordinatensystem wird der Dachfirst mit Hilfe von Funktionsgraphen modelliert. Die Funktionswerte geben die Höhe des Dachfirsts über dem Boden an; die x-Achse beschreibt das Bodenniveau. Dabei entspricht eine Längeneinheit $10\,\mathrm{m}$ in der Wirklichkeit.

a) Zunächst wird eine ganzrationale Funktion f dritten Grades betrachtet. Der Graph von f verläuft durch die beiden Punkte $P(0\,|\,3)$ und $W(3\,|\,4)$. Dabei ist W ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Mit Hilfe des Graphen von f wird über dem Intervall $[0;3]$ ein erstes Teilstück des Dachfirsts modelliert.

a1) Leiten Sie einen Funktionsterm von f her. (6 P)
[*Kontrolle:* $f(x) = \frac{1}{27}\,x^3 - \frac{1}{3}\,x^2 + x + 3$]

a2) Berechnen Sie die Höhe des Dachfirsts über dem Boden an der Stelle $x = 1$. (2 P)

a3) Geben Sie einen Funktionsterm der Ableitungsfunktion f' und die Steigung des Graphen von f an der Stelle $x = 0$ an. (2 P)

a4) Weisen Sie mit Hilfe einer Rechnung nach, dass der Graph von f für $x < 3$ rechtsgekrümmt ist. (3 P)

b) Nun werden eine Funktion g und ihre Ableitungsfunktion g' mit

$$g(x) = (x-3)\cdot e^{x-5{,}5} + 4 \qquad \text{und} \qquad g'(x) = (x-2)\cdot e^{x-5{,}5}$$

betrachtet. Mit Hilfe des Graphen von g wird über dem Intervall $[3;6]$ ein weiteres Teilstück des Dachfirsts modelliert.

b1) Ergänzen Sie die Wertetabelle zu g auf dem Beiblatt, und zeichnen Sie den Graphen von g über dem Intervall $[3;6]$ in das dort vorgegebene Koordinatensystem. (4 P)

b2) Die Graphen von f und g verlaufen beide durch den Punkt $W(3\,|\,4)$.
Prüfen Sie, ob der Dachfirst dort knickfrei modelliert wird. (3 P)

b3) Bestimmen Sie alle Extrem- und Wendestellen der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion g. (8 P)

b4) Der Graph der Funktion g wird an der y-Achse gespiegelt und dann um zwölf Längeneinheiten nach rechts verschoben. Dadurch ergibt sich der Graph der Funktion g^*, der über dem Intervall $[6;9]$ auf dem Beiblatt gezeigt wird.
Ermitteln Sie einen Funktionsterm $g^*(x)$, und stellen Sie diesen Term in der Form $(a\,x+b)\cdot e^{-x+c}+4$ mit geeigneten reellen Werten a, b, c dar. (4 P)

c) Für eine verbesserte Modellierung des Dachfirsts wird anstelle der Funktion g aus Teilaufgabe b) die Verwendung der Funktionen h_k und ihrer Ableitungsfunktionen h_k' mit

$$h_k(x) = \frac{5}{9}\,(x-3)^2 \cdot e^{k(x-6)} + 4$$

und

$$h_k'(x) = \frac{5}{9}\,(x-3)\cdot(k\,x - 3\,k + 2)\cdot e^{k(x-6)}$$

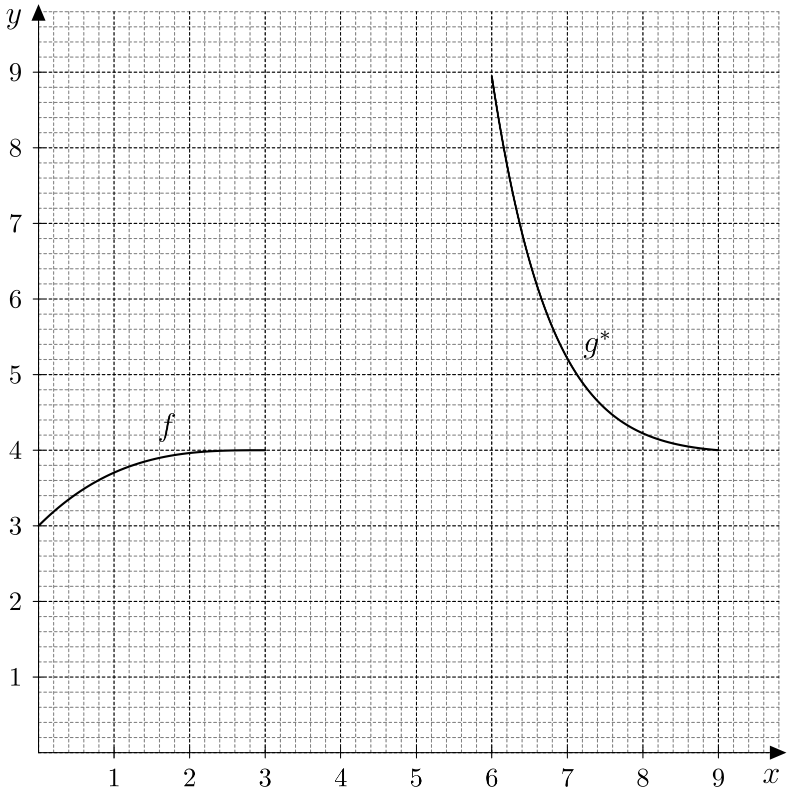
mit $k \geq 0$ vorgeschlagen.

c1) Weisen Sie nach, dass die Funktion g aus Teilaufgabe b) nicht in der Schar der Funktionen h_k enthalten ist. (2 P)

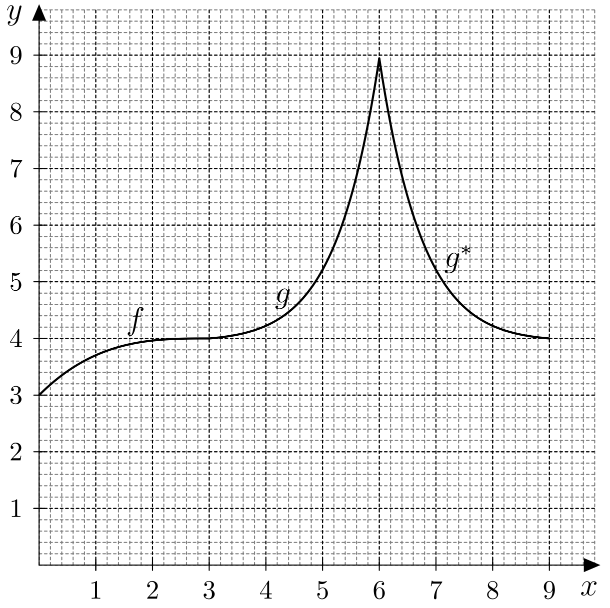
c2) Zeigen Sie, dass der Term $5\,k + \dfrac{10}{3}$ die Steigung des Graphen von h_k an der Stelle $x = 6$ angibt. (2 P)

c3) So wie in der Teilaufgabe b4) lässt sich aus dem Graphen von h_k der Graph einer Funktion h_k^* erzeugen. Bei $x = 6$ modellieren die Graphen von h_k und h_k^* dann die Spitze des Dachfirsts.
Bestimmen Sie denjenigen Wert für k, für den der Innenwinkel der Spitze $30°$ beträgt. (4 P)

Beiblatt zu den Teilaufgaben b1) und b4)



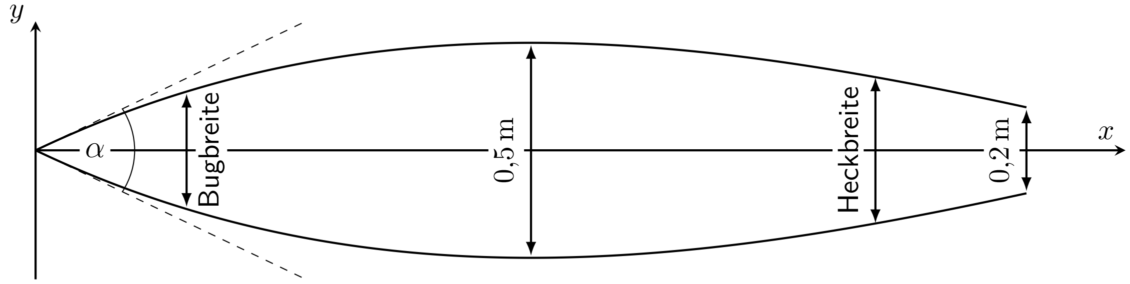
x	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$g(x)$	4,00		4,22			6,50	

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe a)
Mit dem Ansatz $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ ergibt sich
$f'(x) = 3a\,x^2 + 2b\,x + c$ und $f''(x) = 6a\,x + 2b$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die Auswertung der Informationen zu f ergibt $f(0) = 3 \Leftrightarrow d = 3$ und</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$$\left|\begin{array}{lcl} f(3) &=& 4\\ f''(3) &=& 0\\ f'(3) &=& 0\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} 27\,a+9\,b+3\,c &=& 4-3\\ 18\,a+2\,b &=& 0\\ 27\,a+6\,b+c &=& 0\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} a &=& \frac{1}{27}\\ b &=& -\frac{1}{3}\\ c &=& 1\end{array}\right|.$$
Damit ist $f(x) = \frac{1}{27}\,x^3 - \frac{1}{3}\,x^2 + x + 3$.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt $f(1) = \frac{100}{27} \approx 3{,}70$.
Also beträgt die Höhe des Dachfirsts an der Stelle $x = 1$ etwa $37\,\mathrm{m}$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(x) = \frac{1}{9}\,x^2 - \frac{2}{3}\,x + 1$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(0) = 1$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Der Graph von f ist für $x < 3$ rechtsgekrümmt, wenn $f''(x) < 0$ für $x < 3$ gilt.
Mit $f''(x) = \frac{2}{9}\,x - \frac{2}{3}$ gilt
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9}\,x - \frac{2}{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{9}\,x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x < 3$.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe b)
<table>
<tr><td>x</td><td>3</td><td>3,5</td><td>4</td><td>4,5</td><td>5</td><td>5,5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>4,00</td><td>$\boxed{4{,}07}$</td><td>4,22</td><td>$\boxed{4{,}55}$</td><td>$\boxed{5{,}21}$</td><td>6,50</td><td>$\boxed{8{,}95}$</td></tr>
</table></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Es gilt $f'(3) = 0$.	1		
Aus $g'(3) \approx 0{,}082$ folgt $g'(3) \neq f'(3)$. Daher wird der Dachfirst durch die Graphen von f und g an der Stelle $x = 3$ nicht knickfrei modelliert.		2	
Notwendig für eine Extremstelle x ist $g'(x) = 0$. Wegen $e^{x-5{,}5} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot e^{x-5{,}5} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.		2	
$g''(x) = e^{x-5{,}5} + (x-2) \cdot e^{x-5{,}5} = (x-1) \cdot e^{x-5{,}5}$		2	
Wegen $g''(2) \approx 0{,}03 \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für eine Extremstelle bei $x = 2$ erfüllt.		1	
Notwendig für eine Wendestelle x ist $g''(x) = 0$. Wegen $e^{x-5{,}5} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^{x-5{,}5} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.		2	
Wegen $e^{x-5{,}5} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ kommt es bei $x = 1$ zu einem Vorzeichenwechsel der Werte $g''(x) = (x-1) \cdot e^{x-5{,}5}$. Damit ist eine hinreichende Bedingung für eine Wendestelle bei $x = 1$ erfüllt.		1	
Die Spiegelung an der y-Achse ergibt $g(-x) = (-x-3) \cdot e^{-x-5{,}5} + 4$. Die anschließende Verschiebung um zwölf Einheiten nach rechts liefert $g(-(x-12)) = (-(x-12)-3) \cdot e^{-(x-12)-5{,}5} + 4 = (-x+9) \cdot e^{-x+6{,}5} + 4$. Also ist $g^*(x) = (-1 \cdot x + 9) \cdot e^{-x+6{,}5} + 4$.			4
Teilaufgabe c) Für alle k gilt $h_k(6) = \frac{5}{9} \cdot 9 \cdot e^{k \cdot 0} + 4 = 5 + 4 = 9$ und $g(6) = 3 \cdot e^{0{,}5} + 4 \approx 8{,}946$. Es gibt also keine Funktion h_k, die an der Stelle $x = 6$ mit g übereinstimmt.			2
Für alle k gilt $h_k'(6) = \frac{5}{9} \cdot 3 \cdot (6\,k - 3\,k + 2) \cdot e^{k \cdot 0} = \frac{5}{3} \cdot (3\,k + 2) = 5\,k + \frac{10}{3}$.		2	
Für den Steigungswinkel α des Graphen von h_k an der Stelle $x = 6$ gilt $\tan(\alpha) = h_k'(6) = 5\,k + \frac{10}{3}$.			1
Der Innenwinkel der Spitze des Dachfirsts und $2 \cdot \alpha$ ergänzen sich zu $180°$: $30° + 2 \cdot \alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 75°$ Daraus folgt $\tan(75°) = 5\,k + \frac{10}{3} \Leftrightarrow k = -\frac{4}{15} + \frac{1}{5}\sqrt{3} \approx 0{,}08$.			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Surfbretter können am Computer konstruiert und dann automatisch aus einem Styroporblock gefräst werden. Die folgende Abbildung zeigt die Draufsicht eines Surfbretts, das bezüglich der eingezeichneten x-Achse achsensymmetrisch ist.



Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Eine Surferin wünscht sich ein wie in der Zeichnung dargestelltes Shortboard der Länge $2\,\mathrm{m}$. Die größte Breite von $0{,}5\,\mathrm{m}$ wird genau in der Mitte zwischen Bugspitze und dem Ende des Hecks erreicht. Am Ende des Hecks hat das Surfbrett eine Breite von $0{,}2\,\mathrm{m}$. Der in Fahrtrichtung gesehen rechte Rand des Surfbretts (in der Abbildung der obere Teil) soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades modelliert werden.

a1) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f. (4 P)

[*Kontrolle:* $f(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}35 \cdot x^2 + 0{,}55 \cdot x$]

a2) Zum Vergleich verschiedener Surfbrett-Designs wird oft neben der größten Breite des Surfbretts die Breite des Bretts jeweils $1\,\mathrm{Fuß}$ ($30{,}48\,\mathrm{cm}$) von der Spitze des Bugs und vom Ende des Hecks entfernt gemessen (siehe obige Abbildung).
Berechnen Sie die Bugbreite und die Heckbreite für das vorgegebene Modell. (3 P)

a3) Es gibt zwei Stellen, an denen das Surfbrett eine Breite von $40\,\mathrm{cm}$ aufweist.
Ermitteln Sie den Abstand dieser beiden Stellen voneinander. (3 P)

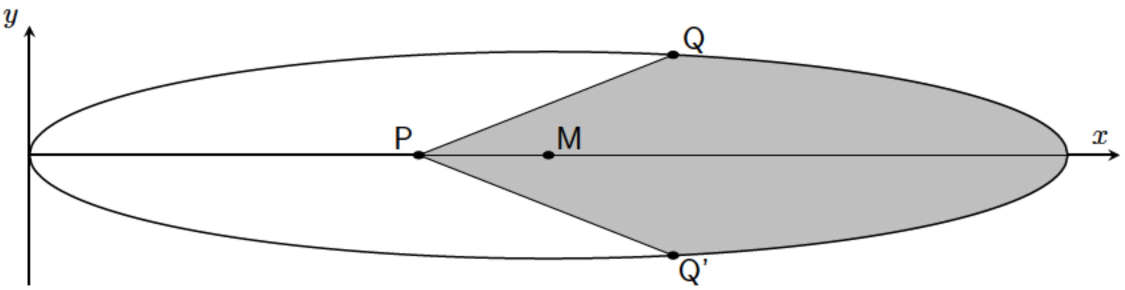
a4) Berechnen Sie den Öffnungswinkel α an der Spitze des Surfbrettes. (3 P)

a5) Nehmen Sie vereinfachend an, dass das Surfbrett eben ist und eine einheitliche Dicke von $5\,\mathrm{cm}$ hat.
Berechnen Sie das Volumen des Surfbretts und geben Sie dieses Volumen in Litern an. (4 P)

b) Neben dem im Aufgabenteil a) untersuchten Shortboard gibt es noch viele andere Bauformen von Surfbrettern. Der in Fahrtrichtung gesehen rechte Rand (in der folgenden Abbildung der obere Teil) eines Funboards wird vollständig durch den Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = 0{,}3 \cdot \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

zwischen den beiden Nullstellen von g beschrieben.



b1) Zeigen Sie, dass das Funboard eine Länge von $2{,}0\,\mathrm{m}$ hat. (2 P)

b2) Geben Sie das Verhalten von $g'(x)$ für $x \to 2$ an und interpretieren Sie dieses Verhalten im Sachzusammenhang. (3 P)

b3) Ein Funboard gleicher Bauart soll - wie in der Abbildung dargestellt - teilweise farbig lackiert werden. Dabei soll der Punkt $P\,(0{,}75\,|\,0)$ geradlinig mit den beiden zur x-Achse symmetrisch angeordneten Punkten $Q\,(b\,|\,g(b))$ bzw. Q' verbunden sein. Q ist so zu platzieren, dass der Flächeninhalt des gefärbten Teils der Hälfte der Gesamtfläche entspricht. Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Situation in Abhängigkeit von b beschreibt und bestimmen Sie die Koordinaten von Q. (5 P)

c) Für jedes $k > 0$ wird durch $g_k(x) = 0{,}15 \cdot k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{k} \cdot x - 1\right)^2}$ mit $x \in [0; k]$ eine Funktion g_k gegeben. Für geeignete k beschreibt der Graph von g_k erneut den in Fahrtrichtung gesehen rechten Rand eines Funboards.

c1) Es gibt ein $k > 0$, für das $g_k = g$ gilt (mit g aus Teilaufgabe b)). Geben Sie den entsprechenden Wert für k an. (1 P)

c2) Der Graph von g_k ist an jeder Stelle x mit $0 < x < k$ rechtsgekrümmt.
Zeigen Sie, dass die größte Breite für das durch g_k modellierte Funboard an der Stelle $x = \frac{k}{2}$ angenommen wird. (3 P)

c3) Ein Surfer wünscht sich ein durch g_k modelliertes Funboard, das eine Länge von $2{,}5$ Metern aufweist. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von k und ermitteln Sie die größte Breite dieses Funboards. (4 P)

c4) Je größer das Verhältnis von größter Breite zur Länge ist, desto stabiler verhält sich ein Surfbrett im Wasser. Weisen Sie nach, dass sich alle durch g_k modellierten Funboards stabiler im Wasser verhalten als das Shortboard aus Aufgabenteil a). (5 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $f(0) = 0, f(1) = 0{,}25, f'(1) = 0, f(2) = 0{,}1$ folgt $a = 0{,}05$, $b = -0{,}35$, $c = 0{,}55$ und $d = 0$, also $f(x) = 0{,}05x^3 - 0{,}35x^2 + 0{,}55x$.	4		
Mit $2 \cdot f(0{,}3048) \approx 0{,}2731$ und $2 \cdot f(2 - 0{,}3048) \approx 0{,}3403$ erhält man eine Bugbreite von etwa $27{,}3\,\mathrm{cm}$ und eine Heckbreite von etwa $34{,}0\,\mathrm{cm}$.	3		
$f(x) = 0{,}2$ ergibt $x \approx 0{,}5272 \vee x \approx 1{,}5374 \vee x \approx 4{,}9354$. Da $x \approx 4{,}9354 > 2$ ist, entfällt diese Lösung. Mit $1{,}5374 - 0{,}5272 = 1{,}0102$ folgt, dass die Stellen etwa $1{,}01\,\mathrm{m}$ voneinander entfernt sind.	3		
$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f'(0)$ ergibt $\alpha = 2 \cdot \arctan(0{,}55) \approx 58°$.		3	
Der Inhalt der Grundfläche beträgt $A = 2 \cdot \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{15}$, und das Volumen $V = A \cdot h = \frac{11}{15} \cdot 0{,}05 = \frac{11}{300} \approx 0{,}03667$, d.h. das Volumen des Surfbretts beträgt etwa $36{,}7$ Liter.		3 1	
Teilaufgabe b) $g(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2$, d.h. die Länge des Funboards beträgt $2\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{m}$.	2		
Für $x \to 2$ gilt $g'(x) \to -\infty$. Am Heck schließt das Funboard abgerundet ab, es hat dort keine Spitze.		3	
Mit $Q(b \mid g(b))$ kann die Gleichung lauten: $0{,}5 \cdot (b - 0{,}75) \cdot g(b) + \int_b^2 g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5 \cdot \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ Auflösen nach b ergibt $b \approx 1{,}2403$ und $Q(1{,}2403 \mid 0{,}2912)$.			5

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) $k = 2$		1	
Wegen $g'_k(\frac{k}{2}) = 0$ ist die notwendige Bedingung für ein lokales Maximum an der Stelle $\frac{k}{2}$ erfüllt. Aufgrund der Rechtskrümmung des Graphen an jeder Stelle x mit $0 < x < k$ liegt bei $\frac{k}{2}$ das globale Maximum.		3	
Mit $g_k(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = k$ weist jedes Funboard die Länge k auf. Also ist das Funboard für $k = 2{,}5$ genau $2{,}5$ Meter lang. Wegen $g_{2,5}(1{,}25) = 0{,}375$ beträgt die größte Breite dieses Longboards $75\,\mathrm{cm}$.		4	
Für das Verhältnis von größter Breite zur Länge gilt $\frac{2 \cdot g_k\left(\frac{k}{2}\right)}{k} = \frac{2 \cdot 0{,}15 \cdot k}{k} = 0{,}3.$ Für das Shortboard aus a) beträgt dieses Verhältnis $\frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$, so dass jedes durch g_k modellierte Funboard sich im Wasser stabiler als das Shortboard verhält.			5
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis

Ein digitales Messgerät misst bei einem Diabetes-Patienten kontinuierlich den Glukosewert (Blutzuckerwert). Der Glukosewert dieses Patienten wird in Abhängigkeit von der Zeit t im Intervall $[\,0\,;\,3{,}75\,]$ mit Hilfe der Funktion g mit

$$g(t) = 13 \cdot t^3 - 78 \cdot t^2 + 104 \cdot t + 96$$

modelliert. Dabei wird der Glukosewert $g(t)$ in u (Units) und die Zeit t in h (Stunden) seit Messbeginn angegeben. Die Abbildung 1 auf dem Beiblatt zeigt den Graphen von g im betrachteten Intervall.

a) a1) Bei einem Glukosewert von unter $70\,\mathrm{u}$ spricht man von Unterzuckerung. Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen die Länge des Zeitraums, in dem Unterzuckerung vorliegt. (2 P)

a2) Etwas mehr als drei Stunden nach Messbeginn liegt im Bereich der Unterzuckerung der niedrigste Glukosewert. Berechnen Sie den zugehörigen Zeitpunkt. (3 P)

a3) Weisen Sie nach, dass der Glukosewert eine Stunde nach Messbeginn um mehr als 40% größer ist als zu Beginn der Messung. (3 P)

a4) Berechnen Sie den durchschnittlichen Glukosewert innerhalb der ersten zwei Stunden nach Messbeginn. (3 P)

b) Aus medizinischer Sicht ist ein zu schnelles Absinken des Glukosewerts gefährlich.

b1) $T(2 \mid -52)$ ist der tiefste Punkt des Graphen der Ableitungsfunktion g' über dem Intervall $[\,0\,;\,3{,}75\,]$.
Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. (3 P)

b2) Die folgenden Terme beschreiben unterschiedliche Änderungsraten der Funktion g.

Term A: $\dfrac{g(3) - g(1)}{3 - 1}$

Term B: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h}$

Geben Sie an, welche Änderungsraten diese beiden Terme beschreiben. (4 P)

b3) Liegt die momentane Änderungsrate unter einem Wert von $-40\,\mathrm{u/h}$, so zeigt das Messgerät des Patienten ein Warnsymbol an.
Weisen Sie nach, dass dieses Warnsymbol im betrachteten Zeitintervall mehr als eine Stunde lang angezeigt wird. (4 P)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit

$f_a(t) = a \cdot \left(t^3 - 4 \cdot t\right)$ und $a > 0$.

Die Abbildung 2 auf dem Beiblatt zeigt den Graphen von f_1.

c) c1) Für jedes $a > 0$ hat der Graph von f_a genau einen Hochpunkt H_a. Beschreiben Sie, wie sich die Lage von H_a ändert, wenn sich der Wert des Parameters a verdreifacht. (3 P)

c2) Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(2\,|\,0)$ schließt mit der t-Achse einen Winkel ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert für a, für den dieser Winkel 45° beträgt. (3 P)

c3) Weisen Sie durch Rechnung nach: Verschiebt man den Graphen von g nach links entlang der t-Achse um 2 Einheiten und anschließend entlang der y-Achse nach unten um 96 Einheiten, so erhält man einen Graphen, der zur Schar f_a gehört. (5 P)

d) Gegeben ist die Funktionenschar h_a mit $h_a(t) = -a \cdot t$ und $a > 0$. Betrachtet wird der folgende Term:

$$\left|\int_1^{t_0} f_a(t)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_1^{t_0} h_a(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Dabei ist t_0 diejenige Lösung der Gleichung $f_a(t) = h_a(t)$, für die $1 < t_0 < 2$ gilt.

d1) Zeichnen Sie in Abbildung 2 ein Flächenstück ein, dessen Inhalt mit dem angegebenen Term für $a = 1$ berechnet werden kann. (2 P)

d2) Berechnen Sie t_0 sowie den Wert des obigen Terms in Abhängigkeit von a. (5 P)

Beiblatt

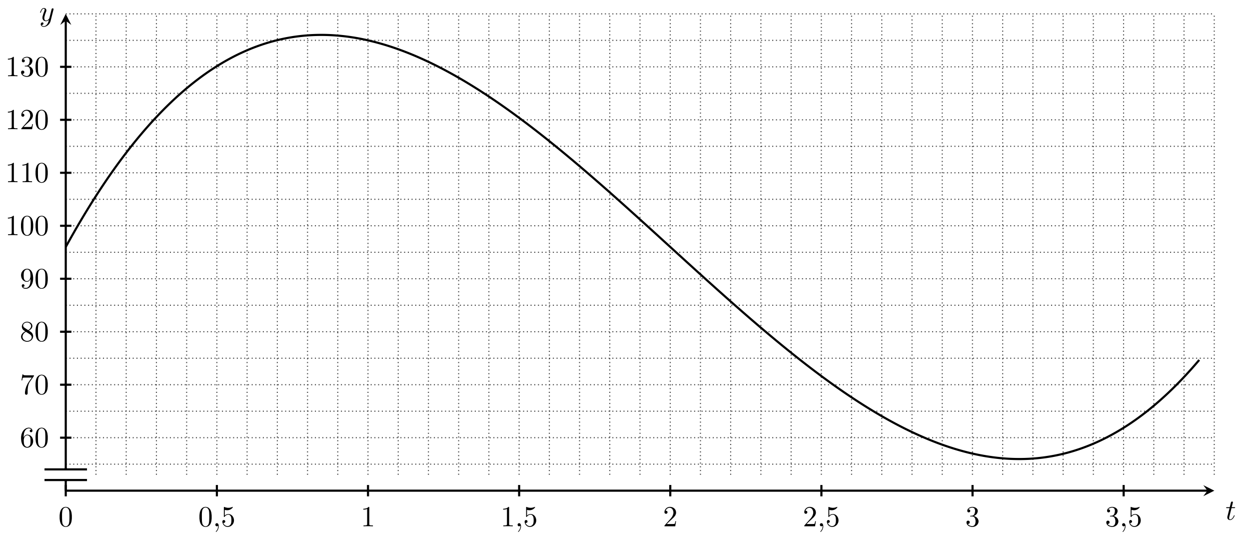


Abbildung 1: der Graph von g im betrachteten Zeitintervall $[\,0\,;\,3{,}75\,]$

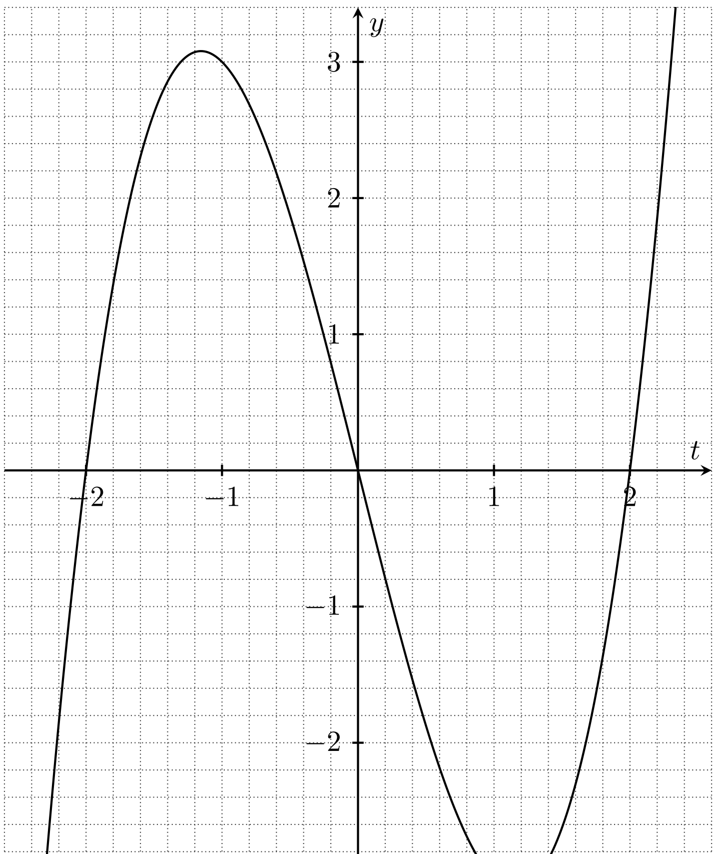
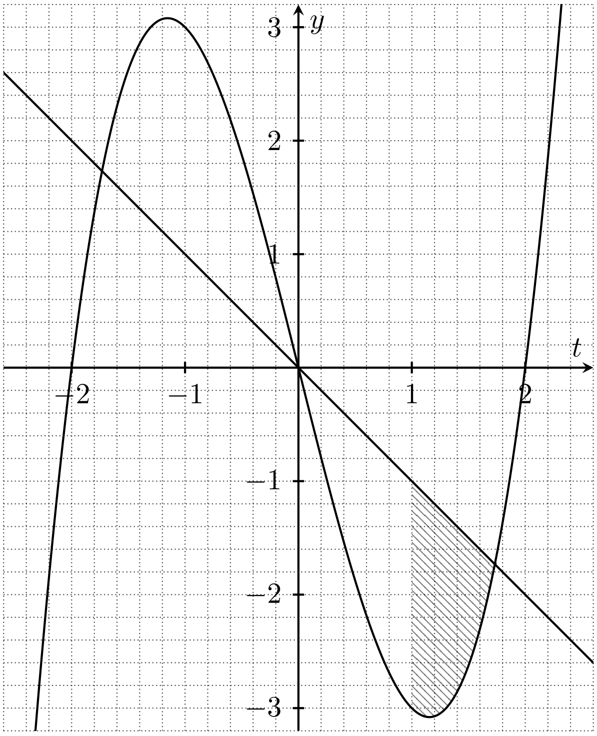


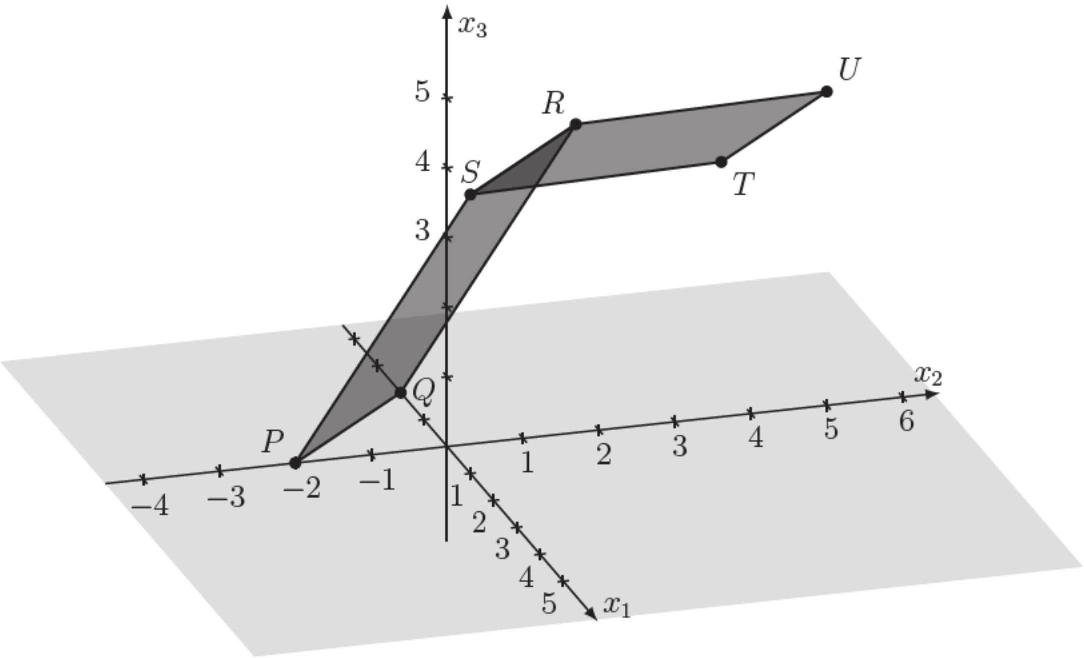
Abbildung 2: der Graph von f_1

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Aus der Grafik lässt sich ablesen, dass der Glukosewert nach etwa $2{,}55$ Stunden unter $70\,\mathrm{u}$ fällt und nach etwa $3{,}68$ Stunden wieder über $70\,\mathrm{u}$ steigt. Die Länge des Zeitraums der Unterzuckerung beträgt also etwa $1{,}1$ Stunden.	2		
Gesucht ist das lokale Minimum im Bereich der Unterzuckerung. Es ist $g'(t) = 39 \cdot t^2 - 156 \cdot t + 104$. Notwendig für ein lokales Extremum an der Stelle t ist $g'(t) = 0$. $g'(t) = 0 \iff t = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 3{,}15 \vee t = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}85$ Bei $t \approx 0{,}85$ liegt keine Unterzuckerung vor, deshalb liegt der gesuchte Zeitpunkt etwa $3{,}15\,\mathrm{h}$ nach Messbeginn.	3		
Es ist $g(0) = 96$ und $g(1) = 135$. Wegen $\frac{135}{96} \approx 1{,}406 > 1{,}4$ ist der Glukosewert nach einer Stunde um mehr als 40% größer als zu Messbeginn.	3		
$\frac{1}{2}\int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t = 122$ Der durchschnittliche Glukosewert innerhalb der ersten beiden Stunden der Messung beträgt $122\,\mathrm{u}$.		3	
Teilaufgabe b) Nach zwei Stunden fällt der Glukosewert im betrachteten Zeitraum am stärksten.		2	
Die momentane Änderungsrate beträgt dort $-52\,\mathrm{u/h}$.		1	
Der Term A beschreibt die mittlere Änderungsrate von g über dem Intervall $[1\,;3]$.	2		
Der Term B beschreibt die momentane Änderungsrate von g an der Stelle $t = 1$.	2		
Es gilt $g'(t) = -40 \iff t = 2 - \frac{2}{13}\sqrt{13} \approx 1{,}45 \vee t = 2 + \frac{2}{13}\sqrt{13} \approx 2{,}55$. Wegen $g'(2) = -52 < -40$ beginnt die Warnung etwa $1{,}45$ Stunden nach Messbeginn und endet etwa $2{,}55$ Stunden nach Messbeginn.		2	
Mit $2{,}55 - 1{,}45 = 1{,}1 > 1$ dauert sie länger als eine Stunde.		2	
Teilaufgabe c) Verdreifacht man den Wert von a, so ändert sich die Stelle des Hochpunktes nicht, aber der y-Wert verdreifacht sich.		3	
Es ist $f_a'(t) = 3at^2 - 4a$ und damit $f_a'(2) = 8a > 0$. $8a = \tan(45°) = 1 \iff a = \frac{1}{8}$		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
$g^*(t) = g(t+2) - 96$ $= (13 \cdot (t+2)^3 - 78 \cdot (t+2)^2 + 104 \cdot (t+2) + 96) - 96$ $= 13t^3 + 78t^2 + 156t + 104 - 78t^2 - 312t - 312 + 104t + 208$ $= 13t^3 - 52t$ $= 13 \cdot (t^3 - 4t)$ Also ist $g^* = f_{13}$, und g^* ist Element der Funktionenschar f_a.			5
Teilaufgabe d) 			2
$f_a(t) = h_a(t) \iff a \cdot (t^3 - 4t) = -at \iff t^3 - 3t = 0$ $\iff t = 0 \vee t = -\sqrt{3} \vee t = \sqrt{3}$ Wegen $1 < t_0 < 2$ gilt $t_0 = \sqrt{3}$.		2	
Für den Wert des Terms folgt dann: $\left\lvert \int_1^{t_0} f_a(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert - \left\lvert \int_1^{t_0} h_a(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert = \left\lvert \int_1^{\sqrt{3}} a \cdot (t^3 - 4t)\,\mathrm{d}t \right\rvert - \left\lvert \int_1^{\sqrt{3}} -a \cdot t\,\mathrm{d}t \right\rvert$ $= a \cdot \left\lvert \int_1^{\sqrt{3}} (t^3 - 4t)\,\mathrm{d}t \right\rvert - a \cdot \left\lvert \int_1^{\sqrt{3}} -t\,\mathrm{d}t \right\rvert$ $= a \cdot \lvert -2 \rvert - a \cdot \lvert -1 \rvert = a$			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Ein Sportler trainiert in einer Kletterhalle. Die Situation wird in einem geeigneten Koordinatensystem modelliert, wobei eine Längeneinheit einem Meter in der Realität entspricht.
Die x_1x_2-Ebene stellt den Hallenboden dar. Der Kletterer steht zunächst auf dem Startpunkt $(0\,|\,0\,|\,0)$. Er klettert an der Wand $PQRS$ hoch, greift von dort auf die Wand $RSTU$ über und hangelt sich an ihr nach vorne bis zur Kante $\overline{TU}$.



Die ebenen Vierecke $PQRS$ und $RSTU$ haben die Eckpunkte
$P\,(0\,|-2\,|\,0)$, $Q\,(-2\,|\,0\,|\,0)$, $R\,(-1\,|\,2\,|\,4)$, $S\,(1\,|\,0\,|\,4)$, $T\,(2\,|\,3\,|\,4{,}5)$ und $U\,(0\,|\,5\,|\,4{,}5)$.
Das Viereck $PQRS$ liegt in der Ebene E.

a) a1) Berechnen Sie die Länge der Kante $\overline{PQ}$. (2 P)

a2) Zeigen Sie, dass das Viereck $PQRS$ ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist. (5 P)

a3) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform. (4 P)

[*Kontrolle:* $E:\ 4\,x_1 + 4\,x_2 - 3\,x_3 = -8$]

a4) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Ebene E mit der x_3-Achse und geben Sie die Höhe der Wand senkrecht über dem Startpunkt an. (4 P)

a5) Untersuchen Sie, ob es in der Ebene E einen Punkt $(x_1\,|\,x_2\,|\,2)$ mit ganzzahligen Koordinaten x_1 und x_2 gibt. (3 P)

b) In der Nähe der Kante $\overline{TU}$ hängt bei $G\,(3\,|\,3{,}5\,|\,4{,}5)$ eine Glocke, die mit einer Leine am Hallendach befestigt ist. Zum Abschluss seiner Trainingseinheit läutet der Kletterer diese Glocke mit der einen Hand, während er sich mit der anderen Hand an demjenigen Punkt K auf der Kante $\overline{TU}$ festhält, der den geringsten Abstand zu G hat.

Durch T und U verläuft die Gerade $g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OT} + r\cdot\overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b1) Bestimmen Sie den Fußpunkt F des Lotes von G auf g. (5 P)

[*Kontrolle:* $F\,(2{,}25\,|\,2{,}75\,|\,4{,}5)$]

b2) Begründen Sie, dass K und F nicht identisch sind. (2 P)

b3) Künftig soll die Glocke an einem anderen Punkt G^* platziert werden. Der Punkt G^* befindet sich in einer Höhe von $4{,}5\,\mathrm{m}$ und ist gleich weit von T und U entfernt; sein Abstand vom Mittelpunkt M der Kante $\overline{TU}$ beträgt $35\,\mathrm{cm}$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M und die Koordinaten eines Punktes G^* mit den beschriebenen Eigenschaften. (5 P)

c) Im Rahmen einer Renovierung wird darüber nachgedacht, den Winkel zwischen den beiden Wänden zu verändern. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist durch $E_a:\ x_1 + x_2 - a\,x_3 = 1 - 4\,a$ eine Ebene E_a gegeben. Jede dieser Ebenen enthält die Gerade durch R und S.

c1) Es gibt genau eine Zahl a mit $E_a = E$. Bestimmen Sie diese Zahl. (3 P)

c2) E_8 ist diejenige Ebene, in der das Viereck $RSTU$ liegt. Berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebenen E und E_8. (3 P)

c3) Bestimmen Sie alle Zahlen a, so dass sich E und E_a unter einem $60°$-Winkel schneiden. (4 P)

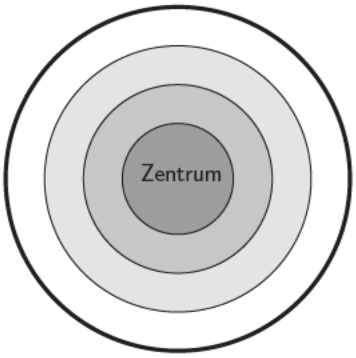
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) $\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-2-0\\0-(-2)\\0-0\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{(-2)^2+2^2+0^2} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$ Die Länge der Kante $\overline{PQ}$ beträgt also ca. $2{,}83\,\mathrm{m}$.	2		
Da $\overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix}-1-1\\2-0\\4-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ}$ gilt, ist $PQRS$ ein Parallelogramm.	2		
Mit $\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ ist $\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{PS} = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 2 \neq 0$. Somit ist $PQRS$ kein Rechteck, weil $\overline{PQ}$ und $\overline{PS}$ nicht senkrecht aufeinander stehen.	3		
Wegen $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix}8\\8\\-6\end{pmatrix}$ ist $\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}8\\8\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E.		2	
Mit $4\,x_1 + 4\,x_2 - 3\,x_3 = \begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} = -8$ ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene $E:\ 4\,x_1 + 4\,x_2 - 3\,x_3 = -8$.		2	
Für Punkte auf der x_3-Achse gilt $x_1 = x_2 = 0$. Für den gesuchten Schnittpunkt gilt daher: $4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot x_3 = -8 \Leftrightarrow -3 \cdot x_3 = -8 \Leftrightarrow x_3 = \frac{8}{3}$ Der Schnittpunkt ist $\left(0 \mid 0 \mid \frac{8}{3}\right)$.	3		
Die Wand ist senkrecht über dem Startpunkt ca. $2{,}67\,\mathrm{m}$ hoch.	1		
Für jeden Punkt $(x_1 \mid x_2 \mid 2)$ der Ebene E gilt: $4\,x_1 + 4\,x_2 - 3 \cdot 2 = -8 \Leftrightarrow 4\,x_1 + 4\,x_2 = -2$		1	
Division durch 4 führt zu $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$. Wenn x_1 und x_2 aber ganzzahlig sind, so trifft das auch auf $x_1 + x_2$ zu. Also gibt es keinen Punkt mit den beschriebenen Eigenschaften.			2
Teilaufgabe b) Für die Ebene H, die senkrecht zu g verläuft und G enthält, gilt: $-2\,x_1 + 2\,x_2 = -2 \cdot 3 + 2 \cdot 3{,}5 = 1$		2	
$g \cap H:\ -2 \cdot (2 - 2r) + 2 \cdot (3 + 2r) = 1 \Leftrightarrow 2 + 8r = 1 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{8}$		2	
Wegen $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}2\\3\\4{,}5\end{pmatrix} - \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}25\\2{,}75\\4{,}5\end{pmatrix}$ ist $F\,(2{,}25 \mid 2{,}75 \mid 4{,}5)$.		1	
Wegen $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OT} + r \cdot \overrightarrow{TU}$ mit $r = -\frac{1}{8}$ und somit $r \notin [0\,;\,1]$ liegt F nicht auf der Kante $\overline{TU}$. Im Gegensatz dazu liegt K auf dieser Kante, stimmt also nicht mit F überein.		2	
Aus den Überlegungen folgt $K = T$.			

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Mit $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ ist $M\,(1\,\vert\,4\,\vert\,4{,}5)$. Benötigt wird ein Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\vec{v} \perp \overrightarrow{TU}$ und $\vec{v} \neq \vec{0}$. Wegen $\overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ eignet sich z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\overrightarrow{OG^*} = \overrightarrow{OM} + 0{,}35 \cdot \frac{\vec{v}}{\vert\vec{v}\vert} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} + \frac{0{,}35}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 4{,}25 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ hat G^* die gerundeten Koordinaten $(1{,}25\,\vert\,4{,}25\,\vert\,4{,}5)$. $\overrightarrow{OG^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} - \frac{0{,}35}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 3{,}75 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ *ist ebenfalls zulässig, auch wenn* G^* *dann oberhalb der Wand* $RSTU$ *liegt.*	1		2 2
Teilaufgabe c) a muss so gewählt werden, dass der Normalenvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ von E ein Vielfaches des Normalenvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$ von E_a ist. Es ist $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$. Die dritte Komponente führt dann zu $-3 = -4a \Leftrightarrow a = 0{,}75$.		3	
Für den Schnittwinkel φ gilt $\cos(\varphi) = \frac{\left\vert \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\vert}{\left\vert \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\vert \cdot \left\vert \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\vert} = \frac{32}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{66}}$ und damit $\varphi \approx 52{,}04°$.		3	
$0{,}5 = \cos(60°) = \frac{\left\vert \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \right\vert}{\left\vert \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\vert \cdot \left\vert \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \right\vert} = \frac{\vert 8+3a \vert}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{2+a^2}}$ $\Leftrightarrow \frac{41}{4} \cdot (2 + a^2) = (8 + 3a)^2$ $\Leftrightarrow 5a^2 - 192a - 174 = 0$ $\Leftrightarrow a = \frac{96}{5} - \frac{41}{5}\sqrt{6} \approx -0{,}89 \vee a = \frac{96}{5} + \frac{41}{5}\sqrt{6} \approx 39{,}29$			4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

Eine Gruppe von Bogenschützen schießt im Training regelmäßig auf die in der Abbildung dargestellte Scheibe.
Es soll angenommen werden, dass für jedes Mitglied der Gruppe die Anzahl der Treffer ins Zentrum durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.
Die 18-jährige Nike trifft dabei das Zentrum der Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von $70\,\%$.



a) a1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Nike in einer Serie von 20 Schüssen das Zentrum

- genau 14-mal trifft;
- mindestens 10-mal trifft;
- mit mehr als $60\,\%$ und weniger als $80\,\%$ ihrer Schüsse trifft. (7 P)

a2) Bestimmen Sie – beispielsweise durch systematisches Probieren – die Anzahl an Schüssen, die Nike mindestens abgeben muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $99\,\%$ mindestens zweimal das Zentrum zu treffen. (4 P)

b) Nike und Victor trainieren oft gemeinsam. Die Wahrscheinlichkeiten in der abgebildeten Vierfeldertafel beruhen auf ihren bisherigen Trainingsergebnissen. Beschrieben wird eine Situation, in der beide jeweils einen Schuss abgeben.

Victor Nike	V	$\overline{V}$	
N	0,28		0,7
$\overline{N}$			
	0,4		1

V: „Victor trifft ins Zentrum.“

N: „Nike trifft ins Zentrum.“

b1) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. (3 P)

b2) Zum Trainingsauftakt schießen die beiden jeweils einen Pfeil ab. Nur einer der beiden Pfeile landet im Zentrum. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Pfeil von Nike abgeschossen wurde. (4 P) b3) Für das Spiel „Treffer gewinnt“ vereinbaren Nike und Victor folgende Regeln:

Sie schießen abwechselnd, wobei Victor beginnt.

Wer zuerst das Zentrum trifft, gewinnt. Das Spiel ist damit sofort beendet.

Sollten beide jeweils dreimal am Zentrum vorbeischießen, so endet das Spiel ebenfalls und Victor ist Sieger.

Untersuchen Sie, wer von den beiden bei diesem Spiel die bessere Gewinnchance hat. (4 P)

c) Für die Teilnahme an einem Wettbewerb testet Nike einen neuen Bogen. Nach einer ausreichenden Eingewöhnungsphase hat sie die Vermutung, mit dem neuen Bogen ihre bisherige Trefferquote ins Zentrum auf mehr als $70\,\%$ verbessern zu können.

c1) Erstellen Sie für eine Serie von 150 Schüssen, die Nike mit dem neuen Bogen abgibt, einen Hypothesentest, der geeignet ist, ihre Vermutung auf einem Signifikanzniveau von $10\,\%$ zu stützen.
Geben Sie die entsprechende Entscheidungsregel an. (8 P)

c2) Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.
Bestimmen Sie dessen Wahrscheinlichkeit unter der Annahme, dass Nikes Trefferquote ins Zentrum mit dem neuen Bogen tatsächlich auf $75\,\%$ gestiegen ist. (4 P)

d) In ihrem Köcher hat Nike 20 Pfeile, von denen 17 Pfeile rote Federn und zwei Pfeile blaue Federn haben. Einer der 20 Pfeile hat goldene Federn.
Nike schießt eine Serie von zehn Pfeilen. Dabei zieht sie vor jedem Schuss ohne hinzusehen einen Pfeil aus ihrem Köcher und schießt diesen ab.

d1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Serie alle Pfeile rote Federn haben. (3 P)

d2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Serie mindestens einen Pfeil jeder Federnfarbe enthält. (3 P)

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>**Teilaufgabe a)**
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Treffer Nikes ins Zentrum. Sie ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}7$.
$P(X = 14) \approx 0{,}1916 \approx 19{,}2\,\%$
$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0{,}0171 = 0{,}9829 \approx 98{,}3\,\%$
$P(20 \cdot 0{,}6 < X < 20 \cdot 0{,}8) = P(12 < X < 16)$
$= P(X \leq 15) - P(X \leq 12) \approx 0{,}7625 - 0{,}2277 = 0{,}5348 \approx 53{,}5\,\%$</td><td>1
1
2
3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Die Zufallsgröße X_n gibt die Anzahl der Treffer an, die Nike bei n Schüssen ins Zentrum erzielt. X_n ist binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}7$.
Gesucht ist das kleinste n mit $P(X_n \geq 2) > 0{,}99$.
$P(X_n \geq 2) = 1 - P(X_n = 0) - P(X_n = 1) = 1 - 0{,}3^n - n \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^{n-1}$
Wegen $P(X_6 \geq 2) \approx 0{,}989$ und $P(X_7 \geq 2) \approx 0{,}996$ muss Nike mindestens 7 Schüsse abgeben.</td><td></td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>**Teilaufgabe b)**
<table>
<tr><th>Victor
Nike</th><th>V</th><th>$\overline{V}$</th><th></th></tr>
<tr><td>N</td><td>$0{,}28$</td><td>$0{,}42$</td><td>$0{,}7$</td></tr>
<tr><td>$\overline{N}$</td><td>$0{,}12$</td><td>$0{,}18$</td><td>$0{,}3$</td></tr>
<tr><td></td><td>$0{,}4$</td><td>$0{,}6$</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>E : “Entweder trifft Nike ins Zentrum oder Victor trifft ins Zentrum.“
Es ist $P(E) = 0{,}42 + 0{,}12 = 0{,}54$.
Somit ist
$P_E(N) = \frac{P(E \cap N)}{P(E)} = \frac{0{,}42}{0{,}54} \approx 0{,}7778 \approx 77{,}8\,\%$.</td><td></td><td>2
2</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Nike
- mit ihrem ersten Schuss gewinnt, ist $0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$,
- mit ihrem zweiten Schuss gewinnt, ist $(0{,}6 \cdot 0{,}3) \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}7) = 0{,}0756$,
- mit ihrem dritten Schuss gewinnt, ist $(0{,}6 \cdot 0{,}3) \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}3) \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}7) \approx 0{,}0136$.
Somit beträgt Nikes Gewinnwahrscheinlichkeit ungefähr
$0{,}42 + 0{,}0756 + 0{,}0136 = 0{,}5092$,
so dass sie die bessere Gewinnchance hat.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Die Zufallsgröße X_p beschreibt die Anzahl der Treffer ins Zentrum, die Nike bei 150 Schüssen mit dem neuen Bogen erzielt. X_p ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 150$ und p.	1		
Da die Hypothese $H_1 : p > 0{,}7$ gestützt werden soll, wird $H_0 : p \leq 0{,}7$ als Nullhypothese gewählt.	1		
Wenn die Hypothese $H : p = 0{,}7$ rechtsseitig verworfen werden kann, so auch die Hypothese H_0.		1	
Zu bestimmen ist die kleinste natürliche Zahl k mit $P\left(X_{0,7} \geq k\right) \leq 0{,}10 \Leftrightarrow 1 - P\left(X_{0,7} \leq k-1\right) \leq 0{,}10$ $\Leftrightarrow P\left(X_{0,7} \leq k-1\right) \geq 0{,}90.$ Aus $P\left(X_{0,7} \leq 111\right) \approx 0{,}878$ und $P\left(X_{0,7} \leq 112\right) \approx 0{,}911$ ergibt sich $k-1 = 112$. Somit ist $k = 113$.		4	
Trifft Nike bei den 150 Schüssen mit dem neuen Bogen mindestens 113-mal ins Zentrum, so stützt dies ihre Vermutung, mit dem neuen Bogen eine höhere Trefferquote erreichen zu können als mit dem alten.		1	
Der Fehler 2. Art tritt ein, wenn bei den 150 Schüssen höchstens 112 Treffer ins Zentrum zu verzeichnen sind und die Nullhypothese damit nicht verworfen wird, also die Vermutung nicht gestützt werden kann, obwohl der neue Bogen Nike zu einer höheren Trefferquote verhelfen würde.		2	
Mit $P\left(X_{0,75} \leq 112\right) \approx 0{,}4937$ beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art bei einer tatsächlichen Trefferquote von $75\,\%$ ungefähr $49{,}4\,\%$.		2	
Teilaufgabe d) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Pfeile mit roten Federn unter den 10 gezogenen Pfeilen an. Dann ist X hypergeometrisch verteilt. $P\left(X = 10\right) = \frac{\binom{17}{10}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{20}{10}} = \frac{2}{19} \approx 0{,}1053 \approx 10{,}5\,\%$		3	
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Serie ▪ einen goldenen, einen blauen und acht rote Pfeile enthält, beträgt $\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{17}{8}}{\binom{20}{10}} = \frac{5}{19} \approx 26{,}3\,\%$. ▪ einen goldenen, zwei blaue und sieben rote Pfeile enthält, beträgt $\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{17}{7}}{\binom{20}{10}} = \frac{2}{19} \approx 10{,}5\,\%$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit $\frac{5}{19} + \frac{2}{19} = \frac{7}{19} \approx 36{,}8\,\%$.			3
Punktsummen	12	18	10