HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x^2 - 1) = x^3 - x$.

1.1 Kreuzen Sie die richtigen Aussagen über f an.

- Die Funktion f besitzt genau

	eine Nullstelle
	zwei Nullstellen
	drei Nullstellen

- Der Graph der Funktion f ist

	achsensymmetrisch zur y - Achse
	punktsymmetrisch zum Ursprung
	weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung

(2 P)

1.2 Bestimmen Sie alle Stellen, an denen der Graph von f die Steigung 11 aufweist.

(3 P)

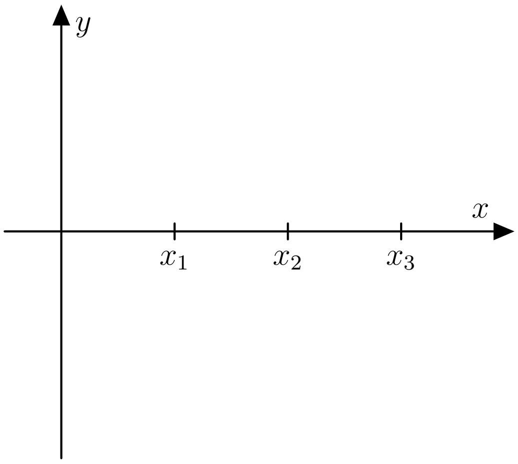
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	▪ drei Nullstellen ▪ punktsymmetrisch zum Ursprung 2 P
1.2	Mit $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1$ gilt $f'(x) = 11 \Leftrightarrow 3 \cdot x^2 - 1 = 11 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2.$ 3 P

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein Minimum an der Stelle x_3.

Die Abbildung zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.

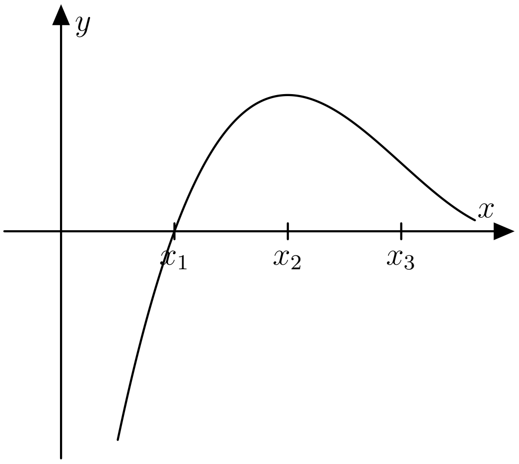


2.1 Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

(2 P)

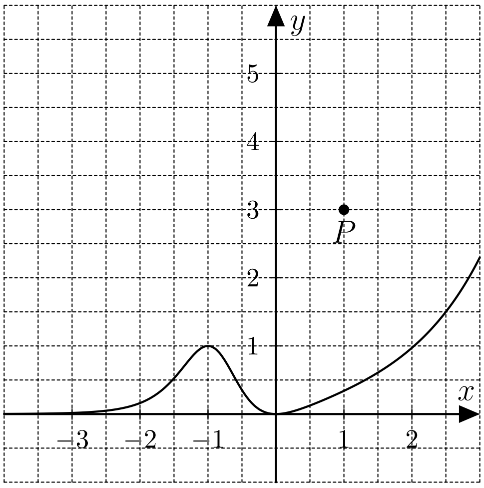
2.2 Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen von f.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	Da f' an der Stelle x_3 ein Minimum hat, ist der Grad von f' mindestens 2 und damit der Grad von f mindestens 3. 2 P
2.2	 3 P

HMF 3 - Analysis (Pool 2)

Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f, dessen einzige Extrempunkte $(-1\,|\,1)$ und $(0\,|\,0)$ sind, sowie den Punkt P.

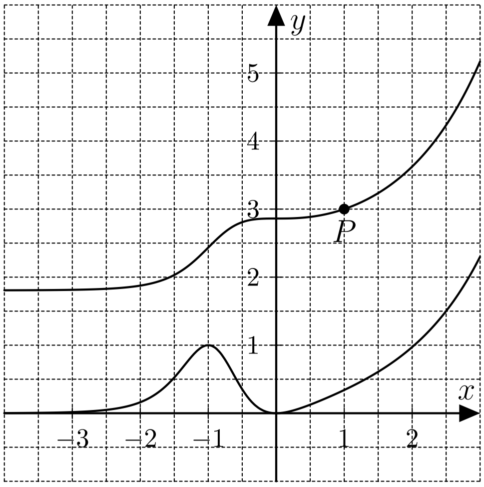


3.1 Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = -f(x-3)$ an.

(2 P)

3.2 Der Graph einer Stammfunktion von f verläuft durch P. Skizzieren Sie diesen Graphen in der Abbildung.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analysis (Pool 2)
3.1	$(2\,\vert -1)$ 2 P
3.2	 3 P

HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

In einer Grundschule werden die Kinder der ersten und vierten Klasse befragt, ob sie schwimmen können. $48\,\%$ der befragten Kinder gehen in die vierte Klasse. $\frac{1}{4}$ der befragten Erstklässler und $\frac{1}{8}$ der befragten Viertklässler geben an, dass sie nicht schwimmen können.

4.1 Vervollständigen Sie die folgende Vierfeldertafel.

Ein befragtes Kind ...	... geht in die erste Klasse	... geht in die vierte Klasse	$\sum$
... gibt an, dass es schwimmen kann			
... gibt an, dass es nicht schwimmen kann			
$\sum$			

(3 P)

4.2 Prüfen Sie, ob der Anteil der Viertklässler unter den Kindern, die angeben, dass sie schwimmen können, größer als $50\,\%$ ist.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)
4.1	3 P
4.2	Von den befragten Kindern gehen $39\,\%$ in die erste Klasse und geben an schwimmen zu können. $42\,\%$ der befragten Kinder gehen in die vierte Klasse und geben an schwimmen zu können. Somit ist der Anteil der Viertklässler unter den Kindern, die angeben, dass sie schwimmen können, größer als $50\,\%$. 2 P

Ein befragtes Kind ...	... geht in die erste Klasse	... geht in die vierte Klasse	$\sum$
... gibt an, dass es schwimmen kann	$0{,}39$	$0{,}42$	$0{,}81$
... gibt an, dass es nicht schwimmen kann	$0{,}13$	$0{,}06$	$0{,}19$
$\sum$	$0{,}52$	$0{,}48$	1

HMF 5 - Stochastik (Pool 1)

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl a. Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

5.1 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ beschrieben werden kann.

(1 P)

5.2 Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von X ist 4.
Bestimmen Sie den Wert von a.

(4 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Stochastik (Pool 1)
5.1	z. B. „Auf beiden entnommenen Kugeln stehen unterschiedliche Zahlen.“ 1 P
5.2	$4 \cdot \frac{9}{25} + 2 \cdot a \cdot \frac{12}{25} + a^2 \cdot \frac{4}{25} = 4$ $\Leftrightarrow \quad a^2 + 6\,a - 16 = 0$ $\Leftrightarrow \quad a = -3 - \sqrt{9+16} = -8 \quad \vee \quad a = -3 + \sqrt{9+16} = 2$ Daher gilt $a = -8$. 4 P

HMF 6 - Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind der Punkt $A(2\,|\,0\,|\,0)$ und die Ebene $E:\ x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 = 11$.

6.1 Zeigen Sie, dass der Punkt A den Abstand 3 von der Ebene E hat.

(3 P)

6.2 Geben Sie zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ an, so dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ eine Gleichung der Ebene E in Parameterform ist.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Geometrie (Pool 1)
6.1	Die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschreibt die zu E orthogonale Gerade durch A. Mit $2 + r + 2 \cdot 2\,r + 2 \cdot 2\,r = 11 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1$ folgt, dass die Länge von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bereits den gesuchten Abstand angibt. Es gilt $\left\lvert \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert = 3$. 3 P
6.2	z. B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2 P

HMF 7 - Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Punkte $A(3\,|\,5\,|\,5)$ und $B(1\,|\,1\,|\,1)$ sowie die Geraden g und h, die sich in B schneiden.
Die Gerade g hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, die Gerade h den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

7.1 Weisen Sie nach, dass A auf g liegt.

(1 P)

7.2 Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte C und D so, dass C auf h liegt und das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.

(4 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Geometrie (Pool 1)
7.1	$\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ 1 P
7.2	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = 6$ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + 6\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 6\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\\5\end{pmatrix}$ 4 P

HMF 8 - Geometrie (Pool 2)

Gegeben sind die Punkte $A(7\,|\,3\,|\,1)$, $B(1\,|\,{-3}\,|\,1)$ sowie die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

8.1 Zeigen Sie, dass g eine Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ ist.

(2 P)

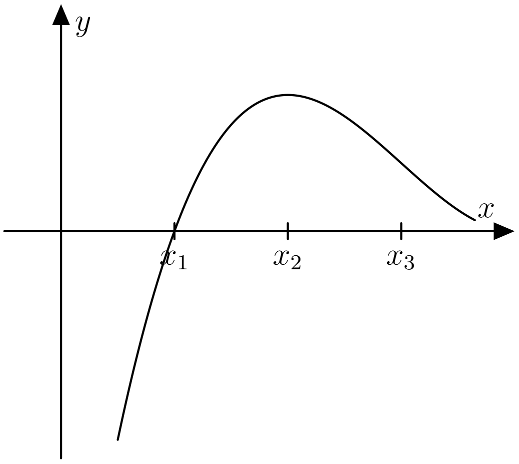
8.2 Es gibt zwei Punkte P und Q auf der Geraden g, so dass die Dreiecke ABP und ABQ jeweils den Flächeninhalt $9\sqrt{2}$ haben.
Berechnen Sie die Koordinaten von P und Q.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Geometrie (Pool 2)
8.1	Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist $M(4\,|\,0\,|\,1)$ und liegt auf g. Weiter gilt $\overrightarrow{AB} \circ \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 0.$ 2 P
8.2	Mit $\overrightarrow{MP} = r \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{MP}\rvert = 9\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \lvert r\rvert \cdot 3 = 9\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow\quad \lvert r\rvert = 1$ $\Leftrightarrow\quad r = -1 \quad \vee \quad r = 1$ Also hat P die Koordinaten $(6\,|\,{-2}\,|\,2)$ oder $(2\,|\,2\,|\,0)$. Q hat die entsprechend anderen Koordinaten. 3 P

HMF-Bewertungsbogen für: ______________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	▪ drei Nullstellen ▪ punktsymmetrisch zum Ursprung 2 P
1.2	Mit $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 1$ gilt $f'(x) = 11 \Leftrightarrow 3 \cdot x^2 - 1 = 11 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$. 3 P

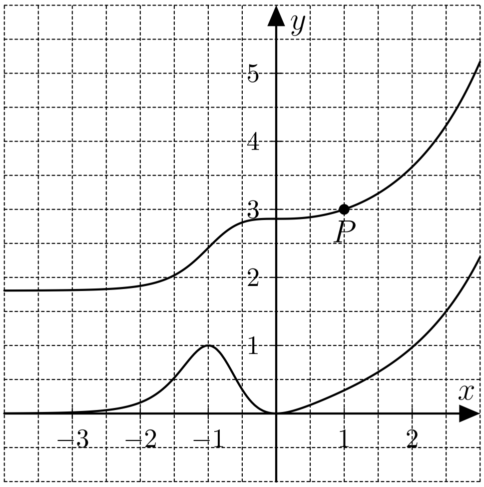
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	Da f' an der Stelle x_3 ein Minimum hat, ist der Grad von f' mindestens 2 und damit der Grad von f mindestens 3. 2 P
2.2	 3 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analysis (Pool 2)

3.1 $(2\,|-1)$

2 P

3.2



3 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Stochastik (Pool 1)

4.1

Ein befragtes Kind …	… geht in die erste Klasse	… geht in die vierte Klasse	$\sum$
… gibt an, dass es schwimmen kann	$0{,}39$	$0{,}42$	$0{,}81$
… gibt an, dass es nicht schwimmen kann	$0{,}13$	$0{,}06$	$0{,}19$
$\sum$	$0{,}52$	$0{,}48$	1

3 P

4.2 Von den befragten Kindern gehen $39\,\%$ in die erste Klasse und geben an schwimmen zu können. $42\,\%$ der befragten Kinder gehen in die vierte Klasse und geben an schwimmen zu können. Somit ist der Anteil der Viertklässler unter den Kindern, die angeben, dass sie schwimmen können, größer als $50\,\%$.

2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Stochastik (Pool 1)
5.1	z. B. „Auf beiden entnommenen Kugeln stehen unterschiedliche Zahlen.“ 1 P
5.2	$4\cdot\frac{9}{25}+2\cdot a\cdot\frac{12}{25}+a^2\cdot\frac{4}{25}=4$ $\Leftrightarrow\quad a^2+6\,a-16=0$ $\Leftrightarrow\quad a=-3-\sqrt{9+16}=-8\quad\vee\quad a=-3+\sqrt{9+16}=2$ Daher gilt $a=-8$. 4 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Geometrie (Pool 1)
6.1	Die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ beschreibt die zu E orthogonale Gerade durch A. Mit $2+r+2\cdot 2\,r+2\cdot 2\,r=11 \quad\Leftrightarrow\quad r=1$ folgt, dass die Länge von $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ bereits den gesuchten Abstand angibt. Es gilt $\left\lvert\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rvert=3$. 3 P
6.2	z. B. $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Geometrie (Pool 1)
7.1	$\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ 1 P
7.2	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+6\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+6\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\5\\5\end{pmatrix}$ 4 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Geometrie (Pool 2)
8.1	Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist $M(4\,\vert\,0\,\vert\,1)$ und liegt auf g. Weiter gilt $\overrightarrow{AB} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. 2 P
8.2	Mit $\overrightarrow{MP} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot \vert\overrightarrow{AB}\vert \cdot \vert\overrightarrow{MP}\vert = 9\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \vert r\vert \cdot 3 = 9\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \quad \vert r\vert = 1$ $\Leftrightarrow \quad r = -1 \quad \vee \quad r = 1$ Also hat P die Koordinaten $(6\,\vert{-2}\,\vert\,2)$ oder $(2\,\vert\,2\,\vert\,0)$. Q hat die entsprechend anderen Koordinaten. 3 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Aufgabe 1: Analysis-CAS

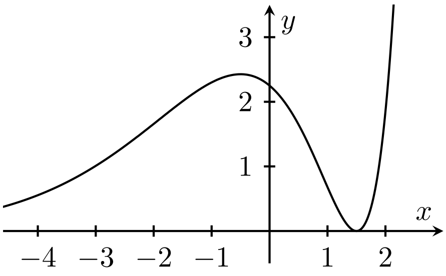


Abbildung 1

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = e^x \cdot (x-a)^2 \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Jeder Graph der Schar hat genau einen Hochpunkt und genau einen Tiefpunkt. Die Abbildung 1 zeigt $G_{\frac{3}{2}}$.

a) a1) $G_{\frac{3}{2}}$ nimmt in einem seiner Wendepunkte seine kleinste Steigung an. Bestimmen Sie diese Steigung rechnerisch. (4 P)

a2) G_a hat mit jeder der beiden Koordinatenachsen genau einen gemeinsamen Punkt. Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte an.
Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass der gemeinsame Punkt mit der x-Achse der Tiefpunkt von G_a ist. (3 P)

a3) Es gibt einen positiven Wert von a, für den G_a und die Koordinatenachsen eine Fläche mit dem Inhalt 3 einschließen. Bestimmen Sie diesen Wert von a. (3 P)

a4) Für jeden Wert von a mit $a \neq 0$ schließt die Gerade durch die beiden Extrempunkte von G_a mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den dieses Dreieck gleichschenklig ist. (5 P)

b) Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,b}$ mit

$$f_{a,b}(x) = e^x \cdot \left((x-a+b)^2 - b\right) \quad \text{mit } a,b \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $f_{a,0}(x) = f_a(x)$. Der Graph von $f_{a,b}$ wird mit $G_{a,b}$ bezeichnet.

b1) Für positive Werte von b hat $G_{a,b}$ zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Für jeden Wert von a wird der Abstand dieser beiden Schnittpunkte betrachtet.
Zeigen Sie rechnerisch, dass dieser Abstand unabhängig von a ist. (3 P)

Erhöht man im Term von $f_{a,b}$ den Wert von b um 1, so erhält man einen Term der ersten Ableitungsfunktion von $f_{a,b}$. Es gilt also

$$f'_{a,b}(x) = f_{a,b+1}(x).$$

b2) Die Abbildung 2 zeigt für einen bestimmten Wert von a die Graphen zweier Funktionen der Schar, bei denen sich die Werte von b um 1 unterscheiden. Entscheiden Sie, welcher der beiden Graphen I und II zum größeren Wert von b gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 P)

b3) Für jeden Wert von a gilt $f_{a,0}(a) = 0$ und $f_{a,1}(a) = 0$ und $f_{a,2}(a) \neq 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache für die Graphen der Funktionen $f_{a,-1}$ an. (3 P)

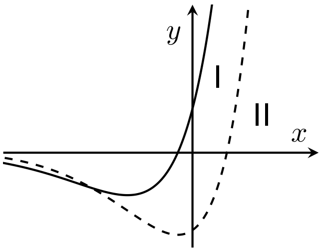


Abbildung 2

c) Der Schalldruckpegel (im Folgenden vereinfacht als Lautstärke bezeichnet) von Wecktönen kann durch Funktionen beschrieben werden.
Die Lautstärke eines bestimmten Wecktons wird durch die in $[\,0\,;\,4\,]$ definierte Funktion h mit

$$h(x) = \begin{cases} -8x^2 + 25x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ -8x^2 + 57x - 64 & \text{für } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

beschrieben. Dabei ist x die seit Beginn des Wecktons vergangene Zeit in Sekunden und $h(x)$ die Lautstärke in Dezibel. Die Abbildung 3 zeigt einen Teil des Graphen von h.

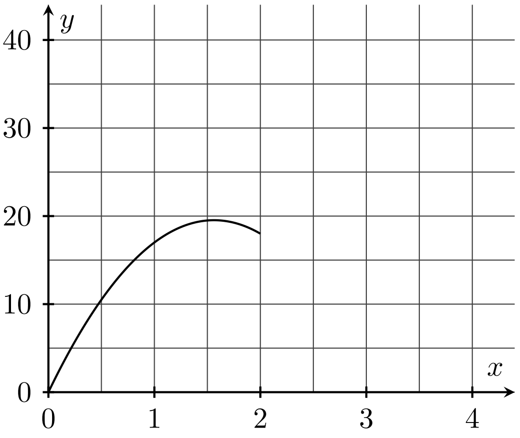


Abbildung 3

c1) Zeigen Sie, dass der Graph von h bei $x = 2$ keinen Sprung aufweist, und vervollständigen Sie den Graphen von h in Abbildung 3. (4 P)

c2) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Weckton die größte Lautstärke hat, und geben Sie diese Lautstärke an. (4 P)

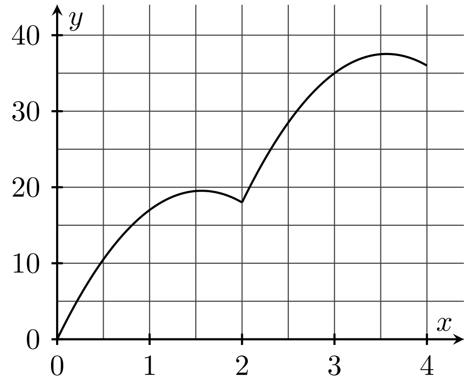
c3) Berechnen Sie unter Verwendung der folgenden Information die durchschnittliche Lautstärke des Wecktons. (4 P)

Der durchschnittliche Funktionswert von h im Intervall $[\,a\,;\,b\,]$ stimmt mit der Höhe eines Rechtecks überein, das die beiden folgenden Eigenschaften hat:

- *Das Rechteck hat die Breite $b - a$.*
- *Das Rechteck hat den gleichen Inhalt wie die Fläche, die für $a \leq x \leq b$ zwischen dem Graphen von h und der x-Achse liegt.*

c4) Dem Graphen von h ist zu entnehmen, dass der Weckton innerhalb der ersten zwei Sekunden bestimmte Lautstärken zweimal annimmt. Zwei Zeitpunkte mit gleicher Lautstärke haben jeweils einen bestimmten Abstand.
Bestimmen Sie rechnerisch den größten dieser Abstände. (4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Notwendig für eine Wendestelle von $f_{\frac{3}{2}}$ ist $f''_{\frac{3}{2}}(x)=0$. $f''_{\frac{3}{2}}(x)=0 \iff x=-\frac{1}{2}+\sqrt{2} \vee x=-\frac{1}{2}-\sqrt{2}$ Gemäß Abbildung liegt der Wendepunkt mit der kleinsten Steigung im ersten Quadranten, also an der Stelle $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{2}$. Die Steigung beträgt $f'_{\frac{3}{2}}(-\frac{1}{2}+\sqrt{2})=2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}+\sqrt{2}}\approx -2{,}07$.	2 2		
$(a\mid 0)$ ist der Schnittpunkt mit der x-Achse, $(0\mid a^2)$ der Schnittpunkt mit der y-Achse. Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $e^x>0$ und $(x-a)^2\geq 0$. Damit ist auch $f_a(x)\geq 0$, so dass der einzige gemeinsame Punkt mit der x-Achse der Tiefpunkt des Graphen von f_a ist.	3		
Aus $\int_0^a f_a(x)\,\mathrm{d}x=3$ ergibt sich $a\approx 1{,}76$.	3		
$f'_a(x)=0 \iff x=a \vee x=a-2$ Das Dreieck ist gleichschenklig, wenn die Steigung der Geraden durch die beiden Extrempunkte -1 beträgt. Aus den Koordinaten der beiden Extrempunkte $(a\mid 0)$ und $(a-2\mid 4\cdot e^{a-2})$ ergibt sich für die Geradensteigung $m=-2\cdot e^{a-2}$. $-2\cdot e^{a-2}=-1 \iff a=2-\ln(2)$		2 3	
Teilaufgabe b) $f_{a,b}(x)=0 \iff x=a-b-\sqrt{b} \vee x=a-b+\sqrt{b}$ Damit ist der Abstand der beiden Schnittpunkte $2\sqrt{b}$ und damit unabhängig von a.		3	
Graph I gehört zum größeren Wert von b. Begründung: Der Graph zum größeren Wert von b stellt die Ableitungsfunktion der zum anderen Graphen gehörenden Funktion dar. Der Graph II kommt als Graph der Ableitungsfunktion nicht infrage, da er an der Extremstelle des Graphen I keine Nullstelle aufweist.			3
Für jeden Wert von a hat der Graph von $f_{a,-1}$ einen Wendepunkt mit der x-Koordinate a, in dem die Tangente an den Graphen parallel zur x-Achse verläuft.			3

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Da $h(2) = 18$ und $-8 \cdot 2^2 + 57 \cdot 2 - 64 = 18$ gilt, liegt an der Stelle $x = 2$ kein Sprung vor.		2	
	2		
Die notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ für ein lokales Extremum in $]\,0\,;\,2\,[$ bzw. $]\,2\,;\,4\,[$ wird für $x = \frac{25}{16} \approx 1{,}56$ oder für $x = \frac{57}{16} \approx 3{,}56$ erfüllt. An diesen Stellen liegt jeweils der Scheitelpunkt einer nach unten geöffneten Parabel.		2	
Da $h\left(\frac{57}{16}\right) > h\left(\frac{25}{16}\right)$ und $h\left(\frac{57}{16}\right) \approx 37{,}53$ ist, hat der Weckton nach etwa $3{,}6$ Sekunden mit circa 38 Dezibel die größte Lautstärke.		2	
Das Rechteck hat die Breite $4 - 0 = 4$. Für den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von h und der x-Achse über dem Intervall $[\,0\,;\,4\,]$ ergibt sich $\int_0^4 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{280}{3}.$ Wegen $\frac{1}{4} \cdot \frac{280}{3} = \frac{70}{3} \approx 23{,}33$ beträgt die durchschnittliche Lautstärke circa 23 Dezibel.			4
$h(x) = h(2) \iff x = 1{,}125 \vee x = 2$ Wegen $2 - 1{,}125 = 0{,}875$ beträgt der größte Abstand $0{,}875$ Sekunden.		4	
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau, der sich dann wieder vollständig auflöst.
An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 6:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Stau kann mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$$

für $0 \leq x \leq 4$ beschrieben werden, wie stark die Staulänge zunimmt bzw. abnimmt. Dabei gibt x die nach 6:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an.

a) a1) Nennen Sie die Uhrzeiten, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat. (3 P)

a2) Es gilt $f(2) < 0$.
Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an. (1 P)

a3) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt. (5 P)

a4) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist.
Begründen Sie Ihre Angabe. (2 P)

b) Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion s mit $s(x) = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ von Bedeutung.

b1) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 6:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden. (2 P)

b2) Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 6:30 Uhr bis 8:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge. (3 P)

b3) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt zwischen 7:00 Uhr und 10:00 Uhr, zu dem die Staulänge $0{,}5\,\mathrm{km}$ geringer ist als eine Stunde vorher. (3 P)

c) Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 6:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 1 gezeigten Graphen dargestellt.
Dabei gibt x wieder die nach 6:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an.

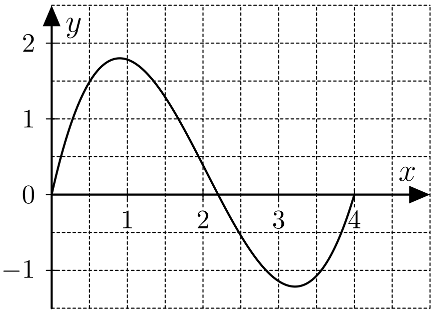


Abbildung 1

c1) Der Stau entsteht erneut um 6:00 Uhr, löst sich aber bis 10:00 Uhr nicht vollständig auf.
Begründen Sie anhand von Abbildung 1, dass es einen Zeitpunkt gibt, an dem die Staulänge größer als 2 Kilometer ist. (3 P)

c2) Um 7:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat.
Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 1, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 1. (3 P)

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit

$$h_k(x) = (x-3)^k + 1 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h_k' bezeichnet.

d) d1) Skizzieren Sie die Graphen von h_1 und h_2 in einem gemeinsamen Koordinatensystem. (3 P)

d2) Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion h_k eine Nullstelle besitzt. (2 P)

d3) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h_k' eine Tangente an den Graphen von h_k ist. (4 P)

d4) Die Graphen von h_k und h_k' werden in der Abbildung 2 für $k = 4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt.
Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ werden die Punkte

$P(\,4|\,h_k(4))$, $Q(\,4|\,h_k'(4))$,
$R(\,2|\,h_k(2))$ und $S(\,2|\,h_k'(2))$

betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.

Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist.
Beweisen Sie, dass jedes dieser Trapeze den Flächeninhalt $2k$ besitzt. (6 P)

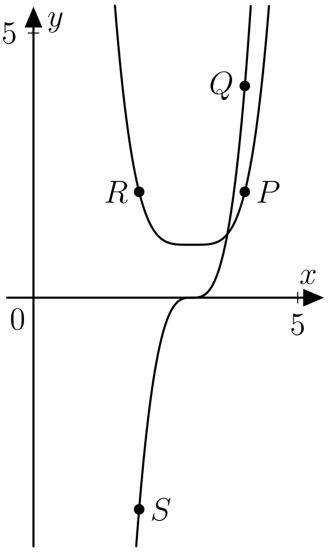
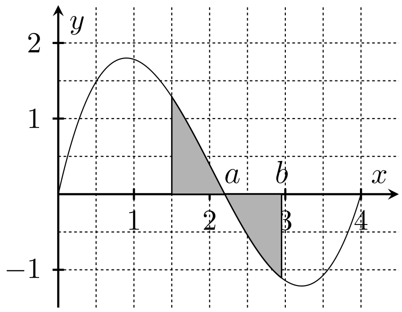
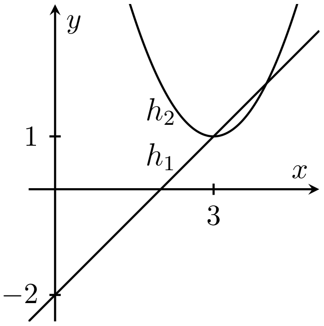


Abbildung 2

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) 06:00 Uhr, 07:36 Uhr, 10:00 Uhr	3		
Um 08:00 Uhr nimmt die Staulänge ab.	1		
Notwendig für eine lokale Maximalstelle x ist $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2\left(\sqrt{6}-4\right)}{5} \approx 0{,}62 \vee x = \frac{2\left(\sqrt{6}+4\right)}{5} \approx 2{,}58 \vee x = 4$ Da zusätzlich $f(0) = f(4) = 0$, $f\,(0{,}62) \approx 2{,}17$ und $f\,(2{,}58) \approx -1{,}59$ gilt, nimmt die Funktion f bei $x \approx 0{,}62$ ihr globales Maximum im betrachteten Intervall an. Damit nimmt die Staulänge etwa $0{,}62$ Stunden nach 06:00 Uhr am stärksten zu.	2 3		
Der Stau ist $1{,}6$ Stunden nach 06:00 Uhr am längsten. Die Länge des Staus nimmt genau dann zu, wenn $f(x) > 0$ gilt.		1 1	
Teilaufgabe b) Da $s'(x) = f(x)$ gilt, ist s eine Stammfunktion von f. Außerdem ist $s(0) = 0$, so dass der Staubeginn korrekt modelliert wird.		2	
Es ist $s(2) - s(0{,}5) \approx 1{,}3$. Die Länge hat um etwa $1{,}3\,\mathrm{km}$ zugenommen. Für die durchschnittliche Änderungsrate ergibt sich etwa $\frac{1{,}3\,\mathrm{km}}{1{,}5\,\mathrm{h}} \approx 0{,}9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.		3	
Aus $s(x) = s(x-1) - 0{,}5$ und $1 < x < 4$ folgt, dass $x \approx 2{,}32$ ist. Etwa $2{,}32$ Stunden nach 6:00 Uhr ist die Staulänge $0{,}5\,\mathrm{km}$ geringer als eine Stunde vorher.		3	
Teilaufgabe c) Der Inhalt des in der Abbildung 1 dargestellten Flächenstücks, das vom Graphen und der x-Achse im ersten Quadranten vollständig eingeschlossen wird, stellt die maximale Staulänge in Kilometern dar. Dabei entsprechen vier Rasterquadrate einer Staulänge von einem Kilometer. Da das Flächenstück größer als acht Rasterquadrate ist, existiert ein Zeitpunkt, an dem der Stau eine Länge größer als 2 Kilometer besitzt.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Wird die Nullstelle mit a und der gesuchte Zeitpunkt mit b bezeichnet, so müssen die Inhalte der Flächen, die der Graph mit der x-Achse für $1{,}5 \leq x \leq a$ und $a \leq x \leq b$ einschließt, übereinstimmen.  		3	
Teilaufgabe d)  	3		
$h_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge k = 2 \cdot n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ Also besitzt h_k nur für alle ungeraden Werte von k eine Nullstelle.		2	
Nur für $k = 1$ und $k = 2$ ist der Graph von h_k' eine Gerade, für $k = 1$ ist dieser Graph allerdings keine Tangente an den Graphen von h_k. Es gilt $h_2(x) = h_2'(x) \Leftrightarrow x = 4$ und $h_2'(4) = h_2''(4)$. Damit ist die Aussage richtig.			4
Sowohl P und Q als auch R und S haben übereinstimmende x-Koordinaten. Damit sind die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel zueinander und das Viereck ist ein Trapez.			1
Für den Flächeninhalt A_k des Trapezes gilt: $A_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\lvert h_k'(4) - h_k(4)\rvert + \lvert h_k'(2) - h_k(2)\rvert\right) \cdot 2$			1
Wegen $h_k'(x) = k \cdot (x-3)^{k-1}$ folgt $A_k = \lvert k-2\rvert + \big\lvert k \cdot (-1)^{k-1} - \big((-1)^k + 1\big)\big\rvert$.			2
Da $k \geq 4$ und gerade ist, folgt $A_k = k - 2 + \lvert -k-2\rvert = k - 2 + (k+2) = 2\,k$.			2
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 1: Analysis

Die Abbildung 1 zeigt schematisch die achsensymmetrische Seitenansicht einer Hängebrücke. Die beiden vertikalen Pfeiler haben einen Abstand von $400\,\mathrm{m}$. Die Wasseroberfläche liegt $20\,\mathrm{m}$ unterhalb der Fahrbahn.

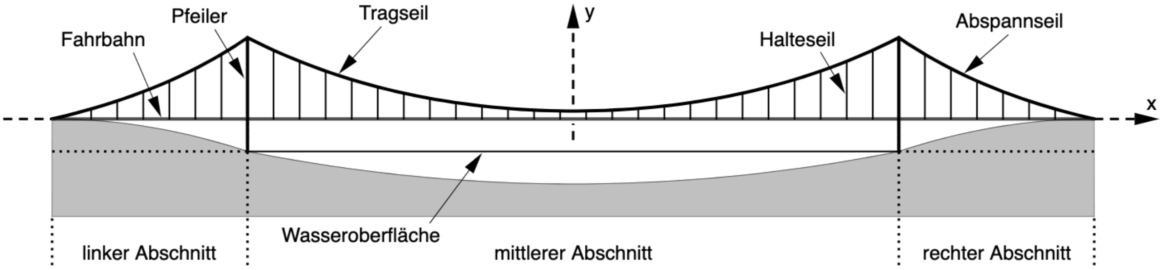


Abbildung 1

Die beiden Pfeiler gliedern die Brücke in einen linken, einen mittleren und einen rechten Abschnitt. Am oberen Ende jedes Pfeilers ist sowohl das Tragseil des mittleren Abschnitts als auch das Abspannseil des linken bzw. rechten Abschnitts befestigt.

Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit $10\,\mathrm{m}$ in der Realität. In der Seitenansicht der Brücke verläuft die x-Achse entlang der horizontal verlaufenden Fahrbahn, die y-Achse entlang der Symmetrieachse.

a) Im rechten Abschnitt der Brücke wird der Verlauf des Abspannseils modellhaft durch den folgenden Funktionsterm beschrieben:

$$r(x) = \frac{253}{100} \cdot \left(e^{\frac{1}{11} \cdot (32-x)} - 1 \right)$$

a1) Begründen Sie, dass die Pfeiler sich im Modell an den Stellen -20 und 20 befinden. (2 P)

a2) Berechnen Sie die Höhe des rechten Pfeilers über der Wasseroberfläche. (3 P)

a3) Geben Sie einen Funktionsterm für die Ableitungsfunktion r' von r an.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem das rechte Abspannseil auf den zugehörigen Pfeiler trifft. (5 P)

Die beiden Abspannseile sind am jeweiligen Ende der Brücke verankert.

a4) Zeigen Sie, dass die Fahrbahn der Brücke insgesamt $640\,\mathrm{m}$ lang ist. (4 P)

a5) In der Seitenansicht begrenzen der rechte Pfeiler, das zugehörige Abspannseil und die Fahrbahn ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt in m^2. (3 P)

a6) Auch im linken Abschnitt der Brücke kann der Verlauf des Abspannseils im Modell durch einen Funktionsterm beschrieben werden.
Geben Sie einen passenden Term $\ell(x)$ sowie das Intervall an, in dem dieser Term das Abspannseil darstellt. (3 P)

b) Im Folgenden wird der mittlere Abschnitt der Brücke betrachtet. Die vertikal verlaufenden Halteseile verbinden die Fahrbahn mit dem Tragseil. Sie haben sowohl von den Pfeilern als auch untereinander einen horizontalen Abstand von $16\,\mathrm{m}$.

Der Verlauf des Tragseils wird modellhaft durch den Funktionsterm

$$s(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^6\cdot\left(x^4+2560\,x^2\right)+\frac{125}{256}$$

beschrieben.

b1) Begründen Sie, dass der Term von s damit in Einklang steht, dass die Seitenansicht der Brücke achsensymmetrisch ist. (2 P)

b2) Berechnen Sie, in welcher Höhe über der Fahrbahn sich das Tragseil in der Mitte des mittleren Abschnitts der Brücke befindet. (2 P)

b3) Zwei Punkte des Tragseils in der rechten Hälfte des mittleren Abschnitts haben einen horizontalen Abstand von $40\,\mathrm{m}$ und einen Höhenunterschied von $5\,\mathrm{m}$.
Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung die x-Koordinate des höher liegenden Punkts im Modell ist. (2 P)

b4) Geben Sie die Bedeutung des Terms

$$\left(\sum_{k=1}^{24} s(-20+1{,}6\cdot k)\right)\cdot 10$$

im Sachzusammenhang an und begründen Sie Ihre Angabe. (5 P)

b5) Die Länge L des Graphen einer Funktion f über dem Intervall $[\,a\,;\,b\,]$ kann durch

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

berechnet werden.
Berechnen Sie die Länge des Tragseils. (4 P)

c) Für jede reelle Zahl $m\geq 0$ ist eine Funktion s_m mit

$$s_m(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^6\cdot\left(x^4+\frac{8}{3}\,m\cdot x^3+2560\,x^2\right)+\frac{125}{256}$$

gegeben.
Untersuchen Sie in Abhängigkeit von m, in wie vielen Punkten der Graph von s_m den Steigungswert null hat. (5 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Der Abstand der Stellen, an denen sich die Pfeiler befinden, beträgt im Modell 40. Die Stellen sind achsensymmetrisch angeordnet, liegen also bei -20 und 20.	2		
$r(20) \cdot 10 + 20 \approx 70$ Der rechte Pfeiler hat eine Höhe von etwa $70\,\mathrm{m}$ über der Wasseroberfläche.	3		
$r'(x) = -\frac{23}{100} \cdot e^{\frac{1}{11} \cdot (32-x)}$ $r'(20) \approx -0{,}6847$ Der Steigungswinkel α des Graphen von r an der Stelle 20 ergibt sich aus $\tan(\alpha) = r'(20)$ zu $\alpha \approx -34{,}4°$. Wegen $90° - 34{,}4° = 55{,}6°$ hat der gesuchte Winkel eine Größe von etwa $56°$.		2 3	
$r(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{11} \cdot (32 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 32$ Mit $2 \cdot 32 \cdot 10 = 640$ hat die Fahrbahn eine Länge von $640\,\mathrm{m}$.		4	
$\int_{20}^{32} r(x)\,\mathrm{d}x \approx 24{,}66$ Mit $24{,}66 \cdot 10^2 = 2466$ beträgt der Flächeninhalt etwa $2500\,\mathrm{m}^2$.		3	
$l(x) = r(-x)$ $[-32\,;\,-20]$	2 1		
Teilaufgabe b) Der Funktionsterm ist ganzrational und enthält Potenzen von x ausschließlich mit geradzahligen Exponenten.	2		
Mit $s(0) = \frac{125}{256} \approx 0{,}49$ beträgt die gesuchte Höhe ca. $4{,}9\,\mathrm{m}$.	2		
$s(x) - s(x-4) = 0{,}5$		2	
Mit dem Term kann die Gesamtlänge der Halteseile im mittleren Brückenabschnitt berechnet werden. Begründung: Der Term $s(-20 + 1{,}6 \cdot k)$ gibt für jedes der 24 Halteseile die Länge im Modell an. Der Faktor 10 berücksichtigt den verwendeten Maßstab.			5
$s'(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^6 \cdot (4\,x^3 + 5120\,x)$ $\int_{-20}^{20} \sqrt{1 + (s'(x))^2}\,\mathrm{d}x \approx 41{,}39$ Das Tragseil ist etwa $414\,\mathrm{m}$ lang.		1 3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) $s_m'(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^6 \cdot (4\,x^3 + 8\,m\,x^2 + 5120\,x)$ Der Steigungswert null liegt vor, wenn gilt: $s_m'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\,x^3 + 8\,m\,x^2 + 5120\,x = 0$ $\Leftrightarrow \quad 4\,x = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2\,m\,x + 1280 = 0$ $\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad (x+m)^2 = m^2 - 1280$			3
Die Anzahl der Punkte des Graphen von s_m, in denen der Steigungswert null vorliegt, beträgt ▪ 1 für $m < \sqrt{1280}$; ▪ 2 für $m = \sqrt{1280}$; ▪ 3 für $m > \sqrt{1280}$.			2
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau, der sich dann wieder vollständig auflöst.

a) An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 6:00 Uhr und löst sich bis 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Stau kann mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot (8 - 5x) \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$$

für $0 \leq x \leq 4$ beschrieben werden, wie stark die Staulänge zunimmt bzw. abnimmt. Dabei gibt x die nach 6:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f.

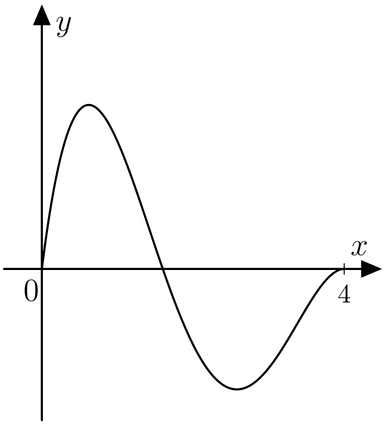


Abbildung 1

a1) Nennen Sie die Uhrzeiten, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat. (3 P)

a2) Es gilt $f(2) < 0$.
Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an. (1 P)

a3) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt. (5 P)

a4) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist.
Begründen Sie Ihre Angabe. (2 P)

a5) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s mit $s(x) = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ angegeben werden. (2 P)

a6) Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 6:30 Uhr bis 8:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge. (3 P)

b) Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 6:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 2 gezeigten Graphen dargestellt. Dabei gibt x wieder die nach 6:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an.

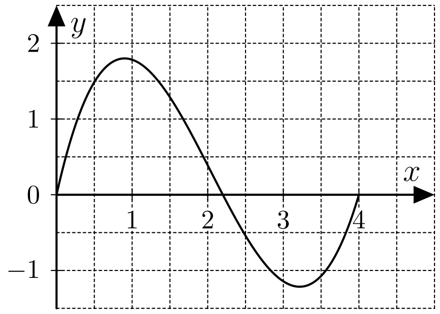


Abbildung 2

b1) Der Stau entsteht erneut um 6:00 Uhr, löst sich aber bis 10:00 Uhr nicht vollständig auf.
Begründen Sie anhand von Abbildung 2, dass es einen Zeitpunkt gibt, an dem die Staulänge größer als 2 Kilometer ist. (3 P)

b2) Um 7:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat.
Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 2, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 2. (3 P)

c) Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit

$$h_k(x) = (x-3)^k + 1 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

c1) Skizzieren Sie die Graphen von h_1 und h_2 in einem gemeinsamen Koordinatensystem. (3 P)

c2) Geben Sie das Verhalten von h_k für $x \to -\infty$ für gerade Werte und für ungerade Werte von k an. (2 P)

c3) Es gibt genau zwei Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben. Ermitteln Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte. (3 P)

c4) Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion h_k Nullstellen besitzt, und bestimmen Sie diese Nullstellen. (4 P)

c5) Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h_k' bezeichnet. Die Graphen von h_k und h_k' werden in der Abbildung 3 für $k = 4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt.
Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ werden die Punkte

$P(4|\,h_k(4))$, $Q(4|\,h_k'(4))$,
$R(2|\,h_k(2))$ und $S(2|\,h_k'(2))$

betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.

Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist.
Beweisen Sie, dass jedes dieser Trapeze den Flächeninhalt $2k$ besitzt. (6 P)

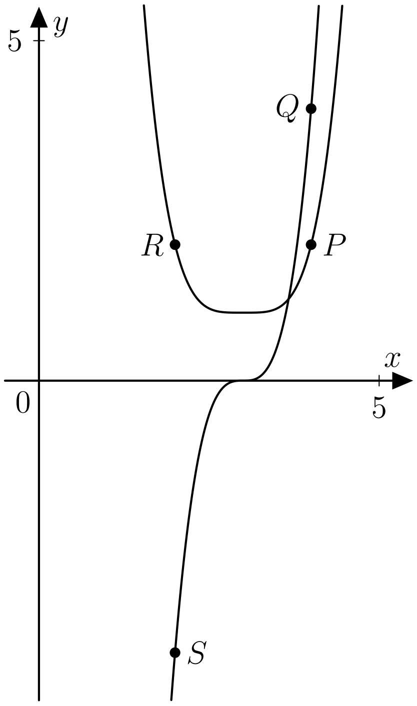
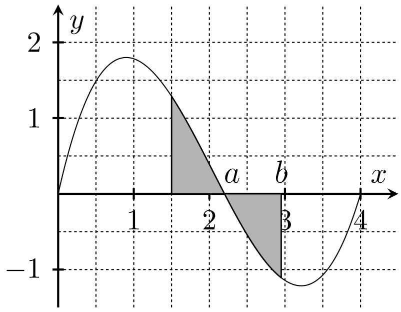
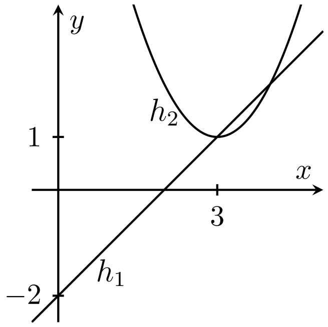


Abbildung 3

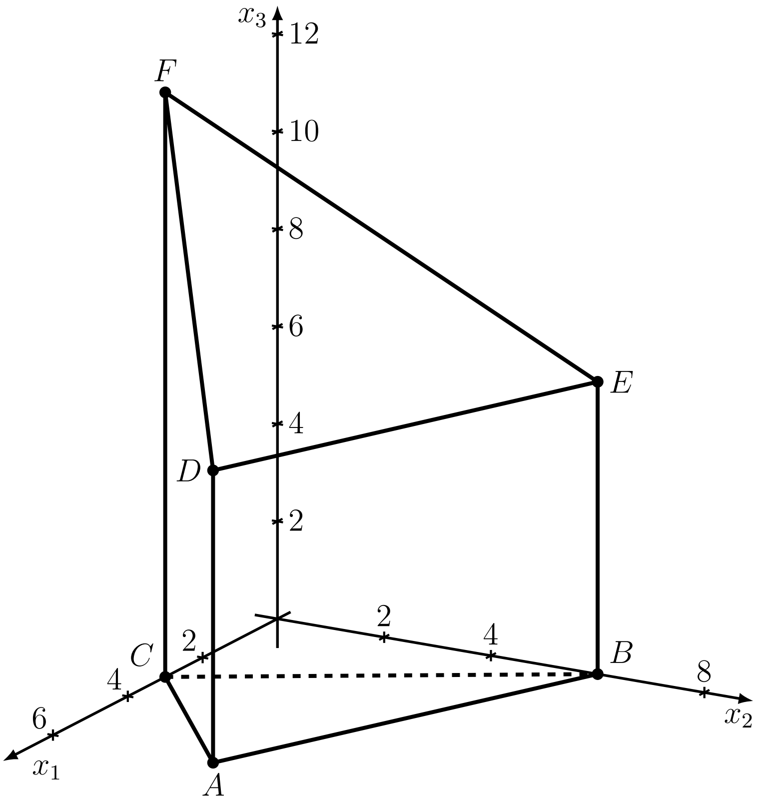
Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) 6:00 Uhr, 7:36 Uhr, 10:00 Uhr	3		
Um 8:00 Uhr nimmt die Staulänge ab.	1		
Notwendig für eine lokale Maximalstelle x ist $f'(x) = 0$. Mit $f'(x) = -\frac{5}{4}\,x^3 + 9\,x^2 - 18\,x + 8$ liefert $-\frac{5}{4}\,x^3 + 9\,x^2 - 18\,x + 8 = 0$ die möglichen lokalen Extremstellen $x_1 \approx 0{,}62$, $x_2 \approx 2{,}58$ und $x_3 = 4$. Anhand des dargestellten Graphen von f ist ersichtlich, dass x_1 die gesuchte globale Maximalstelle von f im betrachteten Intervall $[\,0\,;\,4\,]$ ist. Die Staulänge nimmt etwa $0{,}62$ Stunden nach 6:00 Uhr am stärksten zu.	3 2		
Der Stau ist $1{,}6$ Stunden nach 6:00 Uhr am längsten. Die Länge des Staus nimmt genau dann zu, wenn $f(x) > 0$ gilt.		1 1	
Da $s'(x) = f(x)$ gilt, ist s eine Stammfunktion von f. Außerdem ist $s(0) = 0$, so dass der Staubeginn korrekt modelliert wird.		2	
Es ist $s(2) - s(0{,}5) = \frac{681}{512} \approx 1{,}33$. Die Länge hat um etwa $1{,}33\,\mathrm{km}$ zugenommen. Für die durchschnittliche Änderungsrate ergibt sich etwa $\frac{1{,}33\,\mathrm{km}}{1{,}5\,\mathrm{h}} \approx 0{,}89\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.		3	
Teilaufgabe b) Der Inhalt des in der Abbildung 2 dargestellten Flächenstücks, das vom Graphen und der x-Achse im ersten Quadranten vollständig eingeschlossen wird, stellt die maximale Staulänge in Kilometern dar. Dabei entsprechen vier Rasterquadrate einer Staulänge von einem Kilometer. Da das Flächenstück größer als acht Rasterquadrate ist, existiert ein Zeitpunkt, an dem der Stau eine Länge größer als 2 Kilometer besitzt.		3	
Wird die Nullstelle mit a und der gesuchte Zeitpunkt mit b bezeichnet, so müssen die Inhalte der Flächen, die der Graph mit der x-Achse für $1{,}5 \leq x \leq a$ und $a \leq x \leq b$ einschließt, übereinstimmen. 		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) 	3		
Für $x \to -\infty$ gilt $h_k(x) \to -\infty$ für alle ungeraden Werte von k und $h_k(x) \to +\infty$ für alle geraden Werte von k.		2	
Für $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ und $x-3=1 \Leftrightarrow x=4$ hat $h_k(x)$ jeweils für alle Werte von k den gleichen Wert. Wegen $h_k(3)=1$ und $h_k(4)=2$ lauten die beiden gesuchten Punkte $(3\,\|\,1)$ und $(4\,\|\,2)$.		3	
$h_k(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)^k=-1$ 1. Fall: Für gerade Werte von k besitzt diese Gleichung keine Lösung, so dass h_k keine Nullstelle besitzt. 2. Fall: Für ungerade Werte von k gilt: $(x-3)^k=-1 \Leftrightarrow x-3=-1 \Leftrightarrow x=2$.			4
Sowohl P und Q als auch R und S haben jeweils übereinstimmende x-Koordinaten. Damit sind die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ parallel zueinander und das Viereck ist ein Trapez.			1
Für den Flächeninhalt A_k des Trapezes gilt: $A_k = \frac{1}{2} \cdot (\lvert h_k(4)-h_k'(4)\rvert + \lvert h_k(2)-h_k'(2)\rvert) \cdot (4-2)$			1
Da $h_k'(x)=k\cdot(x-3)^{k-1}$ gilt und k gerade ist, folgt $h_k(4)=1^k+1=2$ und $h_k'(4)=k\cdot 1^{k-1}=k$ sowie $h_k(2)=(-1)^k+1=2$ und $h_k'(2)=k\cdot(-1)^{k-1}=-k$. Somit ist $A_k=\frac{1}{2}\cdot(\lvert 2-k\rvert+\lvert 2+k\rvert)\cdot 2=\lvert 2-k\rvert+\lvert 2+k\rvert$.			3
Da $k \geq 4$ ist, folgt $A_k=(k-2)+(2+k)=2k$.			1
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Die Abbildung zeigt den Körper $ABCDEF$ mit $A(6\,|\,3\,|\,0)$, $B(0\,|\,6\,|\,0)$, $C(3\,|\,0\,|\,0)$, $D(6\,|\,3\,|\,6)$, $E(0\,|\,6\,|\,6)$ und $F(3\,|\,0\,|\,12)$.



a) a1) Untersuchen Sie, ob das Dreieck DEF gleichschenklig ist. (4 P)

a2) Die Punkte D, E und F liegen in einer Ebene L.
Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. (4 P)

[*zur Kontrolle:* $L:\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 42 = 0$]

a3) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der x_1x_2-Ebene einschließt. (3 P)

a4) Berechnen Sie den Abstand des Ursprungs zur Ebene L. (3 P)

a5) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von L mit der x_1x_2-Ebene in Parameterform. (3 P)

b) b1) Begründen Sie, dass das Viereck $ADFC$ ein Trapez ist. (2 P)

b2) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung auf dem Beiblatt. (3 P)

b3) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $ABCDEF$. (3 P)

b4) Auf der Kante $\overline{AD}$ liegt der Punkt Q, auf der Kante $\overline{BE}$ der Punkt $R(0\,|\,6\,|\,2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel.
Bestimmen Sie die x_3-Koordinate von Q. (5 P)

c) Die Ebene N_k enthält die x_3-Achse und den Punkt $P_k(1-k\,|\,k\,|\,0)$ mit $0 < k < 1$.

c1) Für einen bestimmten Wert k besitzt N_k die Gleichung $-3x_1 + 6x_2 = 0$.
Zeichnen Sie die Schnittfläche dieser Ebene mit dem Körper $ABCDEF$ in die Abbildung auf dem Beiblatt ein. (3 P)

c2) Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k.
Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]\,a\,;\,b\,[$, für die N_k für alle Werte von k mit $a < k < b$ jeweils die gleichen Kanten des Körpers schneidet.
Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an. (4 P)

d) Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der vor der Drehung mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der x_1x_2-Ebene liegt und dabei eine positive x_2-Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung.

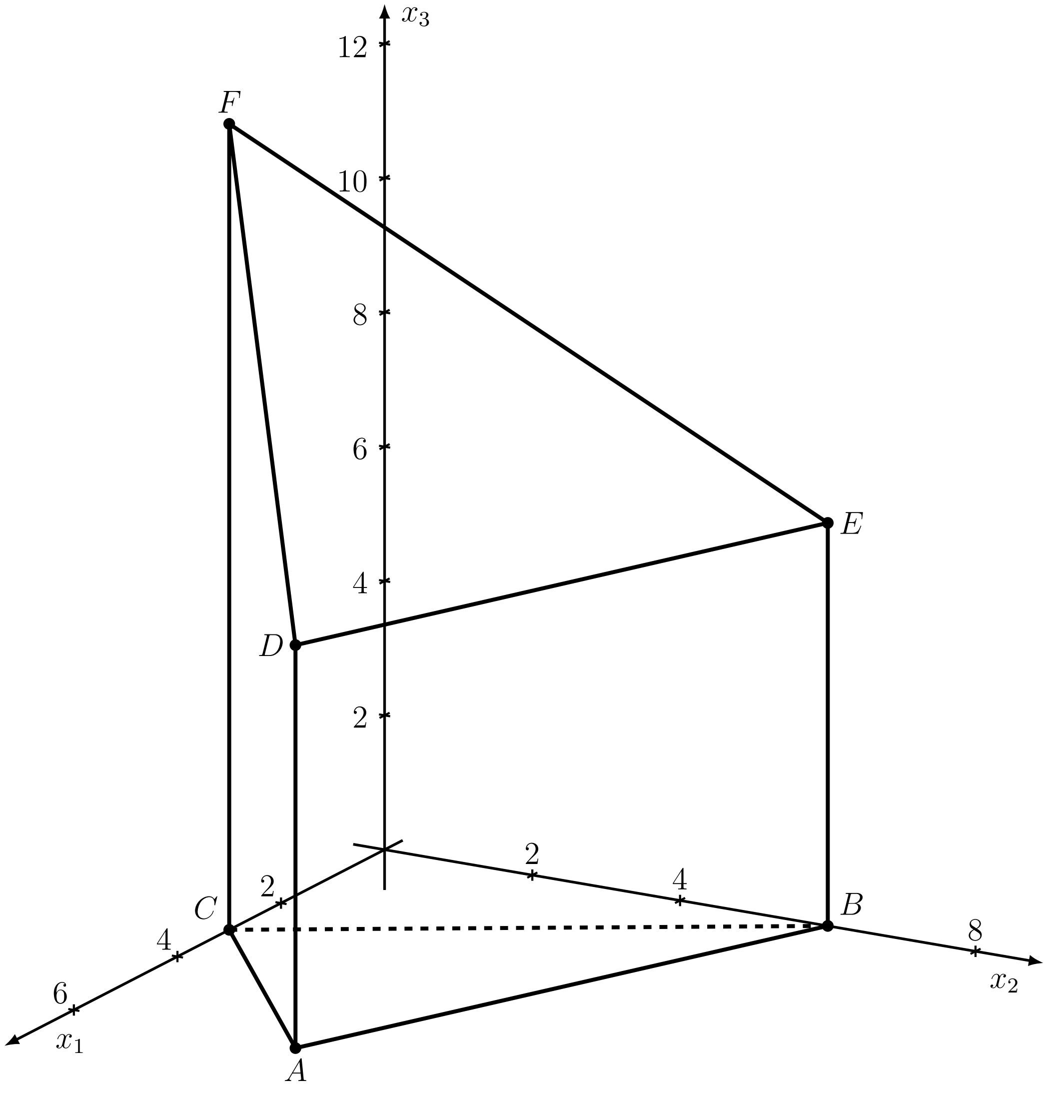
$$\overrightarrow{BA} \circ \left[\overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{OC}\right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = 0{,}8$$

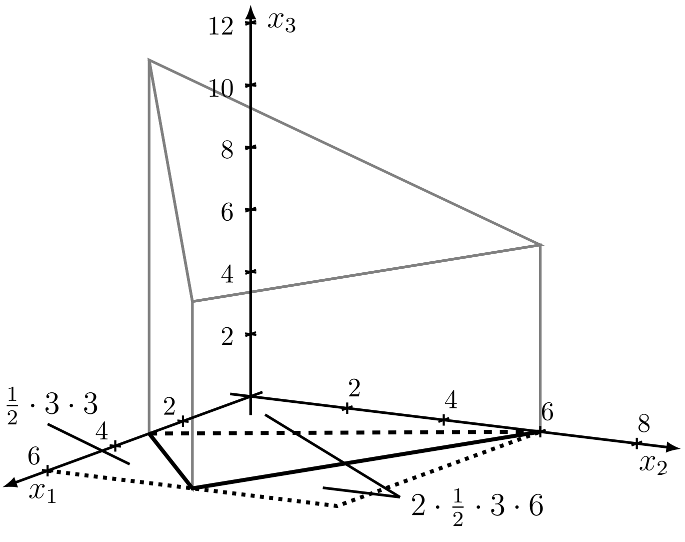
Mit $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BA}$ folgt $S(4{,}8\,|\,3{,}6\,|\,0)$.

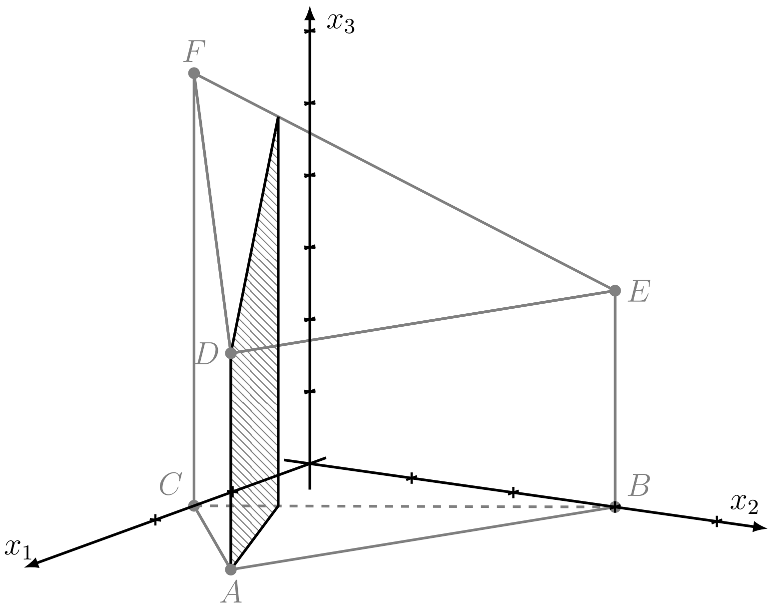
$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \left|\overrightarrow{CS}\right| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an. (3 P)

Beiblatt zu den Teilaufgaben b2) und c1)



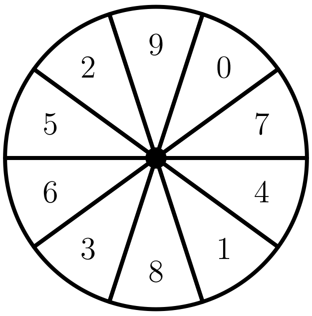
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) $\left\lvert\overrightarrow{FD}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}\right\rvert = 3\sqrt{6}$, $\left\lvert\overrightarrow{FE}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}\right\rvert = 9$, $\left\lvert\overrightarrow{DE}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}\right\rvert = 3\sqrt{5}$ Damit ist DEF nicht gleichschenklig.	4		
Mit $\overrightarrow{FD}\times\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\36\\27\end{pmatrix} = 9\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von L. Wegen $2\cdot3+4\cdot0+3\cdot12=42$ ist $2x_1+4x_2+3x_3-42=0$ eine Gleichung der Ebene L Koordinatenform.		2 2	
Für den gesuchten Winkel φ gilt $\cos(\varphi) = \dfrac{\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{3}{\sqrt{29}}$. Damit folgt $\varphi\approx 56^\circ$.		3	
Der Abstand beträgt $\dfrac{\lvert 2\cdot0+4\cdot0+3\cdot0-42\rvert}{\sqrt{29}} = \dfrac{42}{\sqrt{29}} \approx 7{,}80$.		3	
Die Schnittpunkte der Ebene L mit der x_1- und der x_2-Achse haben die Koordinaten $S_1(21\,\vert\,0\,\vert\,0)$ und $S_2(0\,\vert\,10{,}5\,\vert\,0)$. Damit lautet eine Gleichung der Schnittgeraden $\vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + r\cdot\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix}21\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-21\\10{,}5\\0\end{pmatrix}$.		3	
Teilaufgabe b) Mit $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} = 2\cdot\overrightarrow{AD}$ folgt, dass die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$ zueinander parallel sind. Damit ist $ADFC$ ein Trapez.	2		
	3		

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Es gilt für den Flächeninhalt der Grundfläche $6\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6=\frac{27}{2}$ und damit für das Volumen des prismaförmigen unteren Teils des Körpers $\frac{27}{2}\cdot 6=81$. Die aufgesetzte Pyramide hat das Volumen $\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{2}\cdot 6=27$. Insgesamt hat der Körper ein Volumen von 108.	3		
Da Q auf der Strecke $\overline{AD}$ liegt, hat Q die Koordinaten $Q(6\,\vert\,3\,\vert\,q)$ mit $0\leq q\leq 6$. Damit gilt: $\begin{aligned} &\overrightarrow{QR}\circ\overrightarrow{QF}=0\\ \iff\ &\begin{pmatrix}-6\\3\\2-q\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\-3\\12-q\end{pmatrix}=0\\ \iff\ &9+(2-q)(12-q)=0\\ \iff\ &q^2-14q+33=0\\ \iff\ &q=7-\sqrt{49-33}=3\end{aligned}$		5	
Teilaufgabe c) 			3
Der Punkt P_k liegt genau dann auf der Strecke $\overline{OA}$, wenn $\frac{6}{3}=\frac{1-k}{k}\iff k=\frac{1}{3}$ gilt. Der größte Bereich ist $\left]\,\frac{1}{3}\,;\,1\,\right[$. Es werden die Kanten $\overline{BC}$, $\overline{EF}$, $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ geschnitten.			2 2
Teilaufgabe d) Aufgabenstellung: „Der mit C bezeichnete Eckpunkt des Körpers wird nach der Drehung mit T bezeichnet. Ermitteln Sie die Koordinaten von T." Bedeutung: Der Punkt S ist der Fußpunkt des Lots von C auf $\overline{AB}$.			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

Die Sektoren des abgebildeten Glücksrads sind gleich groß und mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert.



a) a1) Das Glücksrad wird zwanzigmal gedreht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse A, B und C.

A**:** „Es wird genau siebenmal eine ungerade Zahl erzielt."

B**:** „Es wird weniger als neunmal eine ungerade Zahl erzielt."

C**:** „Es wird mehr als siebenmal und höchstens zwölfmal eine ungerade Zahl erzielt."

(5 P)

a2) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse D und E stochastisch unabhängig sind.

D**:** „Die Summe der erzielten Zahlen ist kleiner als 4."

E**:** „Das Produkt der erzielten Zahlen ist 2 oder 3." (5 P)

b) Mit dem Glücksrad wird ein Spiel durchgeführt.

Jede spielende Person darf das Glücksrad beliebig oft drehen. Beendet sie das Spiel selbst, bevor sie eine „0" erzielt, so wird ihr die Summe der erzielten Zahlen in Euro ausgezahlt. Erzielt sie eine „0", so ist das Spiel dadurch beendet und es erfolgt keine Auszahlung.

b1) Eine erste Spielerin entscheidet sich vor dem Spiel dafür, das Glücksrad, sofern sie keine „0" erzielt, viermal zu drehen und danach das Spiel zu beenden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie eine Auszahlung erhält. (2 P)

b2) Bei einer zweiten Spielerin beträgt nach mehrmaligem Drehen des Glücksrads die Summe der erzielten Zahlen 60. Die Spielerin entscheidet sich nun, das Glücksrad genau ein weiteres Mal zu drehen.
Berechnen Sie in dieser Situation den Erwartungswert für die Auszahlung. (3 P)

b3) Wenn sich eine spielende Person vor dem Spiel dafür entscheidet, das Glücksrad, sofern sie keine „0" erzielt, n-mal zu drehen, dann kann der Erwartungswert für die Auszahlung mit dem Term $5 \cdot n \cdot 0{,}9^n$ berechnet werden.

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

„Es gibt zwei aufeinanderfolgende, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von n, für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen." (4 P)

c) Der Schüler Oskar legt einen zehnseitigen Spielwürfel mit den Ziffern 0 bis 9 auf den Tisch und behauptet, dass alle Zahlen des Würfels wie beim Glücksrad mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Schülerin Ronja würfelt mehrfach damit und vermutet, dass die Zahl 8 mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit als von Oskar behauptet auftritt. Ronja plant einen Hypothesentest, um ihre Vermutung zu stützen.

c1) Zunächst ermittelt Ronja die größte Anzahl k, mit der die Zahl 8 bei 240 Durchführungen auftreten darf, damit ihre Vermutung auf einem Signifikanzniveau von $3\,\%$ noch gestützt wird.

- Geben Sie die zugehörige Nullhypothese an und entscheiden Sie, ob ein rechtsseitiger oder linksseitiger Hypothesentest vorliegt.
- Ermitteln Sie die Anzahl k. (6 P)

c2) Schließlich hat Ronja, um ihre Vermutung zu stützen, einen einseitigen Hypothesentest mit einem Stichprobenumfang von $n = 175$ und einem Signifikanzniveau von $r\,\%$ erstellt. Dabei hat sie den Verwerfungsbereich $V = \{0; 1; 2; \ldots; 10\}$ erhalten.
Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen, die Ronja für r gewählt haben könnte, die zu dem ermittelten Verwerfungsbereich passen. (4 P)

d) Ronja und Oskar haben ein Koordinatensystem gezeichnet und auf den Ursprung $(0\,|\,0)$ eine Spielfigur gestellt. Sie vereinbaren nun folgendes Spiel.

Das Glücksrad wird immer wieder gedreht. Tritt eine 7, eine 8 oder eine 9 auf, so darf Oskar die Figur um zwei Einheiten nach oben (in y-Richtung) bewegen.
Tritt eine der sieben anderen Zahlen auf, darf Ronja die Figur nur um eine Einheit nach rechts (in x-Richtung) verschieben.
Das Spiel endet mit einem Sieg für Ronja, wenn die Figur die x-Koordinate 6 erreicht hat. Oskar gewinnt, wenn die Figur die y-Koordinate 6 erreicht hat.

d1) Erläutern Sie, warum die Figur bei diesem Spiel den Punkt $(6\,|\,6)$ nicht erreichen kann. (2 P)

d2) Geben Sie an, wie oft Ronja und wie oft Oskar die Figur seit Spielbeginn bewegt haben, falls die Figur auf dem Punkt $P\,(2\,|\,2)$ steht.
Berechnen Sie, wie groß zu Spielbeginn die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass die Figur auf dem Punkt P zum Stehen kommt. (3 P)

d3) Bestimmen Sie, wie groß zu Spielbeginn die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass Ronja gewinnt. (6 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) X beschreibt die Anzahl der erzielten ungeraden Zahlen. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}5$.	1		
$P(A) = P\left(X = 7\right) \approx 0{,}0739$	1		
$P(B) = P\left(X \leq 8\right) \approx 0{,}2517$	1		
$P(C) = P\left(7 < X \leq 12\right) = P\left(X \leq 12\right) - P\left(X \leq 7\right)$ $\approx 0{,}8684 - 0{,}1316 = 0{,}7368$	2		
Bei Verwendung des Ergebnisraums $\{(0;0), (0;1),..., (1;0),..., (9;9)\}$ ist die Summe der erzielten Zahlen bei 10 der 100 Ergebnisse kleiner als 4. Somit ist $P(D) = \frac{10}{100} = 0{,}1$. Bei vier Ergebnissen tritt das Ereignis E ein, wobei zwei davon auch beim Ereignis D auftreten, daher gilt $P(E) = \frac{4}{100} = 0{,}04$ und $P(D \cap E) = \frac{2}{100} = 0{,}02$.		3	
Es ist $P_E(D) = \frac{P(D\cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}02}{0{,}04} = 0{,}5 \neq 0{,}1 = P(D)$, also sind die Ereignisse D und E nicht stochastisch unabhängig.		2	
Teilaufgabe b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei viermaligem Drehen keine „0“ erzielt wird, beträgt $\left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0{,}6561$.	2		
Wegen $\frac{1}{10} \cdot (0 + 61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69) = 58{,}5$ ist der Erwartungswert der Auszahlung $58{,}50$ €.		3	
Für zwei aufeinanderfolgende Werte von n, für die die Erwartungswerte für die Auszahlung gleich sind, gilt $5 \cdot n \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n = 5 \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} \Leftrightarrow n = (n+1) \cdot \frac{9}{10} \Leftrightarrow n = 9$.			3
Da nur für die aufeinanderfolgenden Zahlen 9 und 10 die Erwartungswerte übereinstimmen, kann es keine drei aufeinanderfolgenden Werte dieser Art geben. Die Aussage ist also richtig.			1
Teilaufgabe c) $Y_{240;\,p}$ beschreibt die Häufigkeit des Auftretens der Zahl 8. Die Nullhypothese von Ronja ist H_0: $p \geq 0{,}1$. Es handelt sich um einen linksseitigen Test.	2		
Wenn die Hypothese mit $p = 0{,}1$ linksseitig verworfen werden kann, so auch die Nullhypothese.		1	
Für $n = 240$ und $p = 0{,}1$ gilt $P(Y_{240;\,0,1} \leq 15) \approx 0{,}0279$ und $P(Y_{240;\,0,1} \leq 16) \approx 0{,}0475$. Die größte Anzahl ist also 15.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
$Y_{175;\,0,1}$ beschreibt die Häufigkeit des Auftretens der Zahl 8 und ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 175$ und $p = 0{,}1$.			
Es gilt $P(Y_{175;\,0,1} \leq 10) \approx 0{,}0318$ und $P(Y_{175;\,0,1} \leq 11) \approx 0{,}0587$.		3	
Daher sind 4 und 5 die einzigen passenden ganzzahligen Werte für r.		1	
Teilaufgabe d) Den Punkt $(6\,\vert\,6)$ könnte man nur über den Punkt $(5\,\vert\,6)$ oder über den Punkt $(6\,\vert\,4)$ erreichen. In beiden Fällen wäre das Spiel bereits beendet worden.	2		
Nach zwei Zügen von Ronja und einem Zug von Oskar steht die Figur auf dem Punkt $P\,(2\,\vert\,2)$.	1		
Wegen $0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}441$ erreicht die Figur den Punkt P bei einem Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von $44{,}1\%$.		2	
Ronja gewinnt, wenn sie auf die Punkte $(6\,\vert\,0)$, $(6\,\vert\,2)$ oder $(6\,\vert\,4)$ ziehen kann. Das Spiel endet mit ihrem Sieg nach insgesamt sechs, sieben oder acht Zügen, wobei sie den letzten Zug gemacht hat und vorher genau fünfmal ziehen durfte.			3
Die binomialverteilte Zufallsgröße Z_n beschreibt die Anzahl der Züge von Ronja bei n Drehungen und $p = 0{,}7$. Mit $P(Z_5 = 5) \cdot 0{,}7 + P(Z_6 = 5) \cdot 0{,}7 + P(Z_7 = 5) \cdot 0{,}7$ $\approx 0{,}1176 + 0{,}2118 + 0{,}2224 = 0{,}5518$ beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ronja gewinnt, ungefähr $55{,}2\%$.			3
Punktsummen	12	18	10